

複素関数論への誘い

城西大学 数理・データサイエンスセンター 大島利雄

1 序

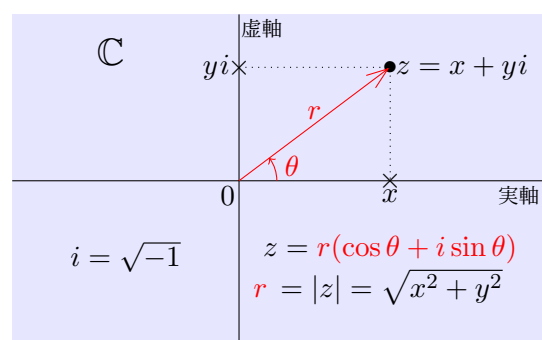
2022年にNHK文化センター青山教室において、高校生のための大学数学講座が4月から毎月1回90分の講義が9月まで開講された。代数・幾何・解析の各分野を3人の講師がテーマを選んで2回ずつ担当した。解析を担当した私は「複素関数論」をテーマに選んだ。初回は「複素微分と正則関数」、2回目は「複素積分とコーシーの積分定理」と副題をつけた。このノートは、その講義のスライドをもとにまとめたもので、説明文はわずかにとどめてある。講座には高校生のみに限らず一般社会人も参加していた。

複素関数論は現代数学にとって必須の基礎分野で、多くの理工系分野においても重要な理論であり、単に関数論というと複素関数論を指すほどである。しかしながら、理工系の大学でも学ぶ機会がないことが多く、ここでは高校数学のレベルで理解できるように努めた。初回は、高校では扱いの難しい三角関数などの初等関数を複素関数として定義してその性質を示すことを目標にした。時間の制約もあり、「解析」の分野からということで等角写像などの幾何学的側面の話は含めなかった。また、聴講者から留数計算の解説の希望があったので、2回目の講義ではそれについてはより詳しく説明した。

ガウス (1777～1855)

Johann Carl Friedrich Gauß

1811年：Gauss平面（複素数平面）



コーシー (1789～1857)

Augustin Louis Cauchy

Cauchy の収束定理

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$$

Cauchy の積分定理

$$\oint f(z) dz = 0$$

2 複素微分

実数は数直線の点に対応するが、複素数は複素数平面の点に対応する。複素数平面は大学では複素平面と呼ぶことが多い。ガウス平面とも言う。実数 x を変数とする実数値関数 $y = f(x)$ は、 xy 平面に関数のグラフを描くとその性質が理解しやすいが、このノートで扱う複素数を変数とする関数（複素関数）はグラフで理解するのは難しい。

複素数 z を変数とする複素数値関数 $f(z)$ の例を考えてみよう。多項式や有理式は、変数に複素数を代入すると自然に複素関数となる。複素数は四則演算が定義されている「数」ということに基づいている。

複素関数

関数	$z = 0$	$z = \frac{1}{2}$	$z = 1$	$z = 2$	$z = \frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$	$\dots$
$f(z) = 1 + z + z^2$	1	$\frac{7}{4}$	3	7	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$	$\dots$
$f(z) = \frac{1}{1-z}$	1	2	$\times$	-1	$\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$	$\dots$

$$1 + \frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 = 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{i}{2},$$

$$\frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i}{5}$$

と計算できる。ここで

$$v_n(z) \stackrel{\text{定義}}{=} 1 + z + z^2 + \dots + z^n \quad \text{という多項式を考えてみよう。}$$

$$zv_n(z) = z + z^2 + \dots + z^n + z^{n+1},$$

$$(1-z)v_n(z) = 1 - z^{n+1} \Rightarrow v_n(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \quad (z \neq 1) \quad \text{であるから}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$v_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (\text{無限級数}).$$

すなわち、複素数 z が $|z| < 1$ を満たすならば、無限級数 $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ は $\frac{1}{1-z}$ に収束する。たとえば $|z| < 1$ のときに (z が実数のときと同様に)、次式が分かる。

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + (n+1)z^n + \dots = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (|z| < 1).$$

多項式や有理関数に限らず、それらを含む複素関数を沢山作りたい！
そこで z の無限級数を考えてみよう。たとえば

複素数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ が $|a_n| \leq 1$ を満たすとき、無限級数 (べき級数)

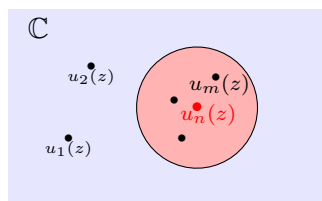
$$u(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n + \dots$$

は収束するか (値が決まるか)? (収束するなら、複素数 z の関数ができる)

$$u_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n \text{ とおく。}$$

$|z| < 1$ で考えよう。 $m > n$ のとき

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |z|^k \\ &= \frac{|z|^{n+1} - |z|^{m+1}}{1 - |z|} \leq \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}. \end{aligned}$$



$|u_m(z) - u_n(z)|$ ($m > n$) の値は、 n を大きくすればいくらでも小さくなる。

このようなとき、 $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)$ は収束する (コーシーの収束定理)。

たとえば $u(z)$ は、上の値が 10^{-6} 以下となるよう n を十分大きくとると、 $u_n(z)$ は誤差 10^{-6} 以下で $u(z)$ を定めているとしてよい。たとえば $|z| \leq \frac{1}{2}$ であったならば $2^{20} > 10^6$ なので、 $n = 20$ ととればよいし、 $u_{100}(z)$ では $u(z)$ との誤差は 10^{-30} 以下となり、いくらでも正確に $u(z)$ の値が分かる。

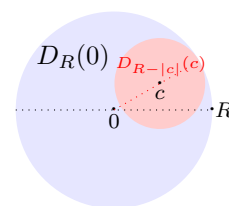
このべき級数 $u(z)$ は単位円 $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の複素関数を定める。一般には
べき級数 $u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ に対し

収束半径 $R \in [0, \infty]$ が決まる： $|z| < R$ なら $u(z)$ は収束し、 $|z| > R$ なら収束しない。

($r < R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n r^n| = 0$, $r > R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n r^n| \neq 0$ といってもよい.)

$D_R(0) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$: $u(z)$ の収束円という。

a_n	1	n	2^n	$\frac{n}{2^n}$	$n!$	$\frac{1}{n!}$
収束半径	1	1	$\frac{1}{2}$	2	0	∞



定理. 収束べき級数 $u(z)$ の収束半径を R とするとき $|c| < R$ を満たす複素数 c に対し、 $u(z)$ は $z = c$ を中心とする収束半径が $R - |c|$ 以上のべき級数で表せる。

すなわち

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z-c) + c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n {}_n C_k c^{n-k} (z-c)^k,$$

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (b_0 = u(c), \quad b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}, \quad b_k = \sum_{n=k}^{\infty} {}_n C_k a_n c^{n-k}).$$

より厳密には以下の註¹を参照。

複素微分

$$u'(c) := \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{u(c+h) - u(c)}{h}$$

定理. 収束べき級数 $u(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ は収束円の内部で複素微分可能で、導関数 $u'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$ の収束半径は同じ。

$c = 0$ のとき $\frac{u(h) - u(0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1}$ (収束べき級数) なので、 $h \rightarrow 0$ が存在し $u'(0) = a_1$ 。

収束円内の点 c を中心とするべき級数より $u'(c) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$. $a_n = \frac{u^{(n)}(0)}{n!}$. $\square$

正則関数. 複素平面内の領域² U で定義された関数 $u(z)$ が、 U 内の任意の点 c の近くで c を中心とするべき級数で表せるとき、 $u(z)$ を U 上の正則関数という。

正則関数の和、積、商、合成、導関数などは、定義された領域で正則になる。

¹Cauchy の収束定理から、 $|c| < r < R$ となる r に対し $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ が収束するので、その値を M とおくと、 $M = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n {}_n C_k |c|^{n-k} (r - |c|)^k$ であり、 $b_k = \sum_{n=k}^{\infty} {}_n C_k a_n c^{n-k}$ も存在することが分かる。 $|b_k| (r - |c|)^k \leq M$ が k によらず成立するので、 $u(z)$ は $z = c$ を中心とする収束半径が $R - |c|$ 以上のべき級数で表せる。また $|z| < r$ ならば $|u(z) - a_0| \leq |z| \frac{M}{r}$ となるので $\lim_{z \rightarrow 0} u(z) = a_0$ に注意。

²領域とは、周を含まない図形で、それに属する任意の2点が図形内の曲線でつながられるもの。

一致の定理. 領域 U で定義された 2 つの正則関数と U 内の点 c に対し, c に収束する U 内の点列 $\{c_j\}$ ($c_j \neq c$) で関数の値が一致していれば, 両者は同じ関数.

c を原点として差の関数を考えよう. 一致していなければ, その差は $a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots = a_m z^m (1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} z + \cdots)$ ($a_m \neq 0$) と表せる. これは $z \neq 0$ で $|z|$ が小さいときは 0 にはならない. (U 内の 2 点は何個かの収束円をつなげるので領域で一致する) $\square$

正則関数 $u(z)$ で $u'(z) = u(z)$ となるものを考えよう.

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + \cdots,$$

$$u'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1} + \cdots,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{n!} = \frac{u(0)}{n!} \quad \text{となるので}$$

$$e(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (\text{指数関数}) \quad \text{とおくと} \quad u(z) = u(0)e(z).$$

また $\{e(z+c)\}' = e(z+c)$ より $e(z+c) = e(c)e(z)$ であるから $c = w$ とおくと

$$e(z+w) = e(z) \cdot e(w). \quad (\text{和公式})$$

$$e(iz) = 1 + \frac{i}{1!}z + \frac{i^2}{2!}z^2 + \frac{i^3}{3!}z^3 + \frac{i^4}{4!}z^4 + \cdots$$

$$= (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots) \quad \text{より}$$

$$\cos z := \frac{e(iz) + e(-iz)}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$\sin z := \frac{e(iz) - e(-iz)}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{とおくと}$$

$$e(iz) = \cos z + i \sin z.$$

さらに以下が分かる.

$$\cos 0 = 1, \cos(-z) = \cos z, \quad \sin 0 = 0, \sin(-z) = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e(iz) + e(-iz)}{2} \right)^2 + \left(\frac{e(iz) - e(-iz)}{2i} \right)^2 = \frac{4e(iz)e(-iz)}{4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$e(\pm i(z+w)) = e(\pm iz) \cdot e(\pm iw),$$

$$\cos(z+w) \pm i \sin(z+w) = (\cos z \pm i \sin z)(\cos w \pm i \sin w)$$

$$= (\cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w) \pm i(\sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w),$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w,$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w,$$

$$e(\pm 3iz) = e(\pm iz)^3,$$

$$\cos 3z \pm i \sin 3z = (\cos z \pm i \sin z)^3,$$

$$= \cos^3 z \pm 3i \cos^2 z \cdot \sin z - 3 \cos z \cdot \sin^2 z \mp i \sin^3 z,$$

$$\cos 3z = \cos^3 z - 3 \cos z \cdot \sin^2 z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z,$$

$$\sin 3z = 3 \cos^2 z \cdot \sin z - \sin^3 z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z.$$

z が実数なら, $e(z)$, $\sin z$, $\cos z$ は実数.

x を実数とする. $x \in [0, 1]$ のとき

$$-(\cos x)' = \sin x = (x - \frac{x^3}{3!}) + x^5(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!}) + \cdots \geq x(1 - \frac{x^2}{6}) \geq x(1 - \frac{1}{6}),$$

$$(\sin x)' = \cos x = (1 - \frac{x^2}{2!}) + x^4(\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!}) + \cdots \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

よって $x \in [0, 1]$ で, $\cos x$ は単調減少, $\sin x$ は単調増加.

$$f(x) = \cos x - \sin x \text{ とおく. } \sin 1 \geq \frac{5}{6}, \cos 1 \leq \sqrt{1 - \frac{5^2}{6^2}} < \sin 1.$$

$f(x)$ は $[0, 1]$ で単調減少で, $x = 0$ で 1, $x = 1$ で負であるから, $f(x) = 0$ となる $x \in [0, 1]$ がただ一つある. それを $\frac{\pi}{4}$ と定義する ($\pi \in (0, 4)$).

x	0	$\cdots$	1
$f(x)$	1	$\searrow$	負

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \geq 0 \quad (x \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ 単調減少}),$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \quad (x \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ 単調増加}),$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (\Leftarrow \text{上式で } x = \frac{\pi}{4}),$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \sin \pi = 0, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x, \quad \cos \pi = -1,$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$e(ix) = \cos x + i \sin x$ は, $x \in [0, 2\pi]$ のとき, 複素平面の単位円周上 1 を出発点として, 反時計回りにちょうど一回まわる.

円弧 $C_\theta := \{e(ix); x \in [0, \theta]\}$ ($\theta \in (0, 2\pi]$) の長さは

$$\sum_{k=1}^n |e(i\theta \frac{k}{n}) - e(i\theta \frac{k-1}{n})| = \sum_{k=1}^n |e(i\frac{\theta}{n}) - 1| = \left| \frac{e(i\frac{\theta}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |i\theta| = \theta.$$

単位円の長さ θ の円弧に対する中心角の大きさを θ と定める.
半径 1 の円周の長さは 2π となる.

また, $e(x)$ は, $x \in (-\infty, \infty)$ で正で単調増加で

$$e(-x) = e(x)^{-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e(x) = 0.$$

$y > 0$ のとき, $y = e(x)$ となる実数 x を $\log y$ と定める.

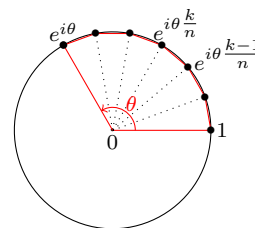
x と θ が実数のとき $e(x + i\theta) = e(x)e(i\theta) = e(x)(\cos \theta + i \sin \theta) = z.$

z が 0 でない複素数のとき $\log z := \log |z| + i \arg z$ (対数関数, $\arg z$ は z の偏角).

$$\log(e(x + i\theta)) = x + i\theta,$$

$$e(\log z) = e(\log |z| + i \arg z) = z \quad (z = |z| \cdot e(i \arg z))$$

$\Rightarrow \log z$ は $e(z)$ の逆関数.



$z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$ のとき $z^\alpha := e(\alpha \log z)$ (べき関数).

$$\Rightarrow \log zw = \log(e(\log z) \cdot e(\log w)) = \log(e(\log z + \log w)) = \log z + \log w,$$

$$\log z^\alpha = \alpha \log z, \quad (zw)^\alpha = e(\alpha \log zw) = z^\alpha w^\alpha, \quad (z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta},$$

$$z^{\alpha+\beta} = e((\alpha + \beta) \log z) = e(\alpha \log z) \cdot e(\beta \log z) = z^\alpha z^\beta,$$

$$z^n = \overbrace{z \times \cdots \times z}^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad z^0 = 1,$$

$$e := e(1) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2.718281828 \cdots$$

$$\log e = 1 \Rightarrow e^z = e(z \log e) = e(z).$$

$$-1 = (1 - z)' = (e^{\log(1-z)})' = e^{\log(1-z)} (\log(1 - z))' = (1 - z) (\log(1 - z))',$$

$$(\log \frac{1}{1-z})' = (-\log(1 - z))' = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots,$$

$$\log \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots \quad (|z| < 1),$$

$$\log(1 + z) = -\log \frac{1}{1-(-z)} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad (|z| < 1).$$

$$z \text{ が } c \neq 0 \text{ に近い} \Rightarrow \log z = \log c + \log(1 + \frac{z-c}{c}) = \log c + \frac{z-c}{c} - \frac{(\frac{z-c}{c})^2}{2} + \cdots.$$

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \log \frac{1}{1-z} + \log(1 + z) = 2(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots),$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \cdots$$

$$= \log \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \cdots) = 0.69314718 \cdots.$$

$$\text{また, } (r(\cos \theta + i \sin \theta))^\alpha = r^\alpha (\cos \alpha \theta + i \sin \alpha \theta),$$

$$\sin nz = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} n C_{2k-1} (-1)^{k-1} \cos^{n-2k+1} z \cdot \sin^{2k-1} z = n \cos^{n-1} z \cdot \sin z - \cdots,$$

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kz = \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = e^{-inz} \frac{e^{i(2n+1)z} - 1}{e^{iz} - 1} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}},$$

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot i \arg i} = e^{i \cdot i (2m + \frac{1}{2})\pi} = e^{-(2m + \frac{1}{2})\pi} \quad (m = 0, \pm 1, \dots).$$

実変数の関数がある領域の複素変数の正則関数に拡張されるなら、その拡張は一意。
実変数で成り立っていた関係式は、拡張した正則関数においても成り立つ。

例： $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ は z が実数で成り立つから、複素変数でも OK.

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\log z)' = \frac{1}{z}.$$

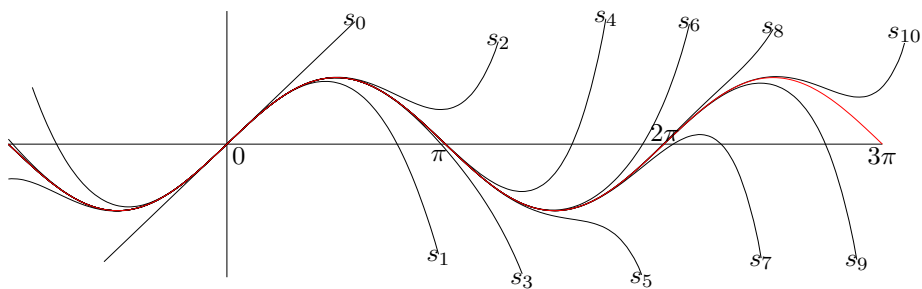
関数の近似の例

$$s_n(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin x,$$

$$s_{2k-1}(x) < \sin x < s_{2m}(x) \quad (x > 0),$$

(上式は $1 - \cos x \geq 0$ に $\int_0^x dx$ を複数回施すと得られる)

$$a, b \in (0, 6), \quad s_{2m}(\frac{a}{6}) \leq \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \leq s_{2k-1}(\frac{b}{6}) \Rightarrow a < \pi < b.$$



たとえば $s_6(\frac{a=3.141592653589792}{6}) < 0.5 < s_7(\frac{b=3.142592653589793239}{6})$ から $\pi \in (a, b)$ が分かる.

3 複素積分

$f(z)$: 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 U 上の正則関数.

U 内の各点 c の近く (近傍) で収束べき級数で表せる.

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots + a_n(z - c)^n + \cdots$$

整関数: 複素平面全体で正則な関数, たとえば多項式, e^z , $\sin z$.

導関数: $f'(z) = a_1 + 2a_2(z - c) + \cdots + na_n(z - c)^{n-1} + \cdots$

原始関数: $F(z) = C + a_0(z - c) + \frac{a_1}{2}(z - c)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(z - c)^{n+1} + \cdots$

実関数の積分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(b) - F(a),$$

$$\gamma: [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b.$$

$$a = t_0 < t_1 = a + \frac{b-a}{N} < \cdots < t_j = a + \frac{j(b-a)}{N} < \cdots < t_N = b,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} f(\gamma(t_j))\gamma'(t_j)(t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} f(\gamma(t_j))(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

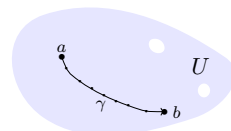
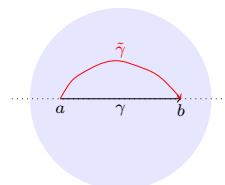
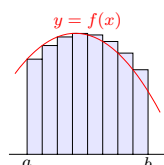
和の各項の差は $o(\frac{1}{N})$ の誤差なので N 個の和は $N \rightarrow \infty$ とすると等号となる.

$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ が, $f(z)$ の一つの収束円の中に入っていれば, γ が $\mathbb{C}$ 内の曲線 C であっても正しい. 特に $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ なら積分の値は 0.

γ が複素平面内の曲線 C で, $f(z)$ はその曲線に沿って正則とする. このとき

複素積分

$$\int_C f(z)dz$$



が同様に定義できる.

原始関数 F は収束円内では存在するので, N を大きく取り, 曲線を細分して, $F'_j = f$ となる F_j を使って定義してもよい. F_j の差は定数なので, F_j の取り方に依らない.

$$|f(z)| \leq M \quad (z \in C) \Rightarrow \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M|C| \quad (|C| \text{ は曲線 } C \text{ の長さ})$$

$-C$ は $-\gamma : [-\beta, -\alpha] \ni t \mapsto \gamma(-t) \in \mathbb{C}$ で定義される曲線 (向きが逆).

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

収束円内部では, 積分の値は, 曲線の取り方によらず曲線の始点と終点で決まる.

コーシーの積分定理. 積分路の始点と終点を固定しておけば, 正則領域 U 内で曲線を連続変形しても積分値は変わらない. 特に, 閉曲線 C の場合, それが領域内で一点に変形できれば

$$\int_C f(z) dz = 0$$

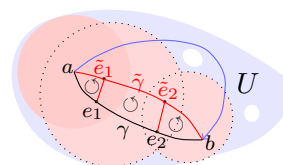
$$C : a \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow b \rightarrow \tilde{e}_2 \rightarrow \tilde{e}_1 \rightarrow a$$

$$C_1 : a \rightarrow \underline{e_1 \rightarrow \tilde{e}_1} \rightarrow a$$

$$C_2 : e_1 \rightarrow \underline{e_2 \rightarrow \tilde{e}_2 \rightarrow \tilde{e}_1} \rightarrow e_1$$

$$C_3 : e_2 \rightarrow b \rightarrow \underline{\tilde{e}_2 \rightarrow e_2}$$

$$\int_{C_\gamma} - \int_{C_{\tilde{\gamma}}} = \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0$$

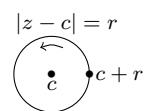


閉曲線: 始点と終点と同じ曲線

単純閉曲線: 自分自身と交わらない閉曲線. 反時計回りの向き (標準)

重要な例

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto c + re^{it} \in \mathbb{C}, \quad \gamma'(t) &= rie^{it}, \\ \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z-c)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^n} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{(1-n)it}}{r^{n-1}} dt \\ &= \begin{cases} \left[\frac{e^{(1-n)it}}{r^{n-1}(1-n)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 & (n \neq 1), \\ 2\pi i & (n = 1). \end{cases} \end{aligned}$$



$$\frac{d}{dz} \frac{(z-c)^{1-n}}{1-n} = (z-c)^{-n} \quad : \text{原始関数}$$

$$\frac{d}{dz} \log(z-c) = \frac{1}{z-c} \Rightarrow$$

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c} = [\log(re^{it})]_{t=0}^{t=2\pi} = [\log r + it]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi i,$$

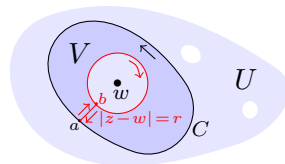
$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z-c)^n} = \begin{cases} 0 & (n : \text{整数}, n \neq 1), \\ 2\pi i & (n = 1). \end{cases}$$

コーシーの積分公式. $f(z)$ は単純閉曲線 C とその内部領域 V で正則ならば

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (w \in V)$$

$$\tilde{C} := C + L_{a \rightarrow b} - C|_{|z-w|=r} - L_{a \rightarrow b} \Rightarrow$$

$$\int_{\tilde{C}} = 0 \Rightarrow \int_C = \int_{|z-w|=r}$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(w)}{z-w} dz = f(w),$$

$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ は $(z-w)$ の収束べき級数で表せるので $|z-w|=r$ での積分は 0 となる. $\square$

Cauchy の積分定理において, $C : |z-c|=R, |w-c|<R \Rightarrow$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-c)-(w-c)} = \frac{1}{z-c} \frac{1}{1-\frac{w-c}{z-c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-c} \left(\frac{w-c}{z-c} \right)^n,$$

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \right) (w-c)^n.$$

$\overline{D_R(c)} := \{z \in \mathbb{C}; |z-c| \leq R\} \subset U \Rightarrow c$ でのべき級数は収束半径が R 以上

U 上の正則関数の (このノートとは) 異なる導入:

U 内の各点で複素微分可能 $\Rightarrow$ コーシーの積分定理 $\Rightarrow$ 収束べき級数で表せる.

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

リウヴィルの定理. 適当な非負整数 n と整数 M 対して $|f(z)| \leq M(|z|^n + 1)$ を満たす整関数 $f(z)$ は n 次以下の多項式となる. 特に有界な整関数は定数となる.

$$m > n \Rightarrow |a_m| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz \right| \leq \frac{M(R^n + 1)}{2\pi R^{m+1}} 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

代数学の基本定理. $n (> 0)$ 次の多項式 $f(z)$ に対し, $f(c) = 0$ を満たす $c \in \mathbb{C}$ が存在する.

そのような c が存在しないとすると, $\frac{1}{f(z)}$ は整関数で $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$ を満たし, 複素平面上で有界で定数となって矛盾. $\square$

孤立特異点におけるローラン展開. $f(z) : D_R(c) \setminus \{c\}$ で正則. このとき

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R), \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z) dz}{(z-c)^{n+1}}$$

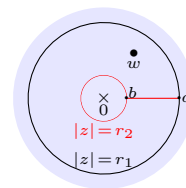
$c = 0$ とする. $0 < r_2 < |w| < r_1 < R$, $a = r_1$, $b = r_2$,

$$C := C_{|z|=r_1} + L_{a \rightarrow b} - C_{|z|=r_2} + L_{b \rightarrow a},$$

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{f(z)dz}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_2} \frac{f(z)dz}{z-w} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n \quad \left(a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}, n = -m-1 \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z(1-\frac{w}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z} \right)^n \quad (|w| < |z| = r_1)$$

$$= -\frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{z}{w} \right)^m \quad (|z| = r_2 < |w|).$$



$a_n \neq 0$ となる最小の n を c における **零点の位数**, $-n$ を **極の位数** という. $n \geq 0$ のとき **除ける特異点**, $n = -\infty$ のとき **真性特異点**, $-\infty < n < 0$ のとき **極** という.

孤立特異点における **留数**

$$\text{Res}(f, c) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z)dz$$

$f(z)$ が $z = c$ を $m (\geq 1)$ 位の極とするとき

$$\text{Res}(f, c) = \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{(z-c)^m f(z)}{(m-1)!} \right]_{z \rightarrow c}$$

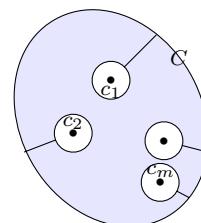
なお $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + \dots$ から上式がわかる.

$g(z)$, $h(z)$ が $z = c$ で正則で, $g(z)$ が $z = c$ を一位の零点とするときは

$$\text{Res}\left(\frac{h}{g}, c\right) = \frac{h(c)}{g'(c)}$$

留数定理. $f(z)$: 単純閉曲線 C とその内部で m 個の孤立特異点 $\{c_1, \dots, c_m\}$ を除いて正則ならば

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, c_j)$$

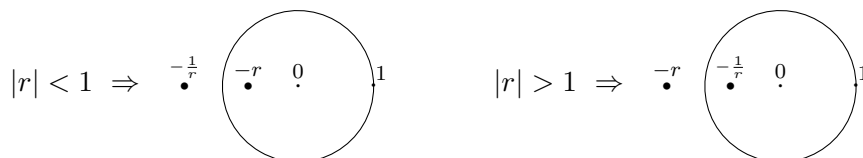


$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{iz} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta \quad (z = e^{i\theta}, \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz).$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r \cos \theta + 1 &= r^2 + r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1 = r^2 + r(z + \frac{1}{z}) + 1 \\ &= z^{-1}(rz^2 + (r^2 + 1)z + r) \\ &= z^{-1}(rz + 1)(z + r) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 + 2r \cos \theta + 1} &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{i(rz + 1)(z + r)} \\ &= \begin{cases} 2\pi i \lim_{z \rightarrow -r} \frac{z + r}{i(rz + 1)(z + r)} = \frac{2\pi}{1 - r^2} & (|r| < 1), \\ 2\pi i \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{r}} \frac{z + \frac{1}{r}}{i(rz + 1)(z + r)} = \frac{2\pi}{r^2 - 1} & (|r| > 1). \end{cases} \end{aligned}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rx}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|r|} \quad (r : \text{実数}).$$

$$C_R^+ := \{Re^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\},$$

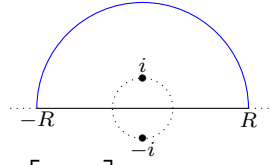
$$\tilde{C}_R^+ := L_{-R \rightarrow R} + C_R^+,$$

$$\int_{\tilde{C}_R^+} \frac{e^{i|r|z} dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i|r|z}}{z^2 + 1}, i\right) = 2\pi i \cdot \left[\frac{e^{i|r|z}}{2z}\right]_{z=i} = \pi e^{-|r|}$$

$$= \int_{-R}^R \frac{\cos rx}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{i|r|z}}{z^2 + 1} dz,$$

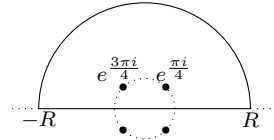
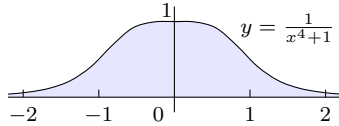
$$|e^{i|r|} R(\cos \theta + i \sin \theta)| = |e^{i|r|R \cos \theta - |r|R \sin \theta}| \leq 1 \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{e^{i|r|z}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + 1)^2}, i\right) = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z^2 + 1)^2} \right]_{z \rightarrow i} \\ &= 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \right]_{z \rightarrow i} = 2\pi i \left[\frac{-2}{(z+i)^3} \right]_{z \rightarrow i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$z^4 + 1 = (z - e^{\frac{\pi i}{4}})(z - e^{\frac{3\pi i}{4}})(z - e^{\frac{5\pi i}{4}})(z - e^{\frac{7\pi i}{4}}),$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{\frac{\pi i}{4}}\right) + 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) \\ &= 2\pi i \left(\left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} + \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) = \frac{\pi i}{2} (e^{-\frac{3\pi i}{4}} + e^{-\frac{9\pi i}{4}}) \\ &= \frac{\pi}{2} (e^{\frac{\pi i}{2}} e^{-\frac{3\pi i}{4}} + e^{\frac{\pi i}{2}} e^{-\frac{9\pi i}{4}}) = \frac{\pi}{2} (e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

定理. $f(z)$ は単純閉曲線 C とその内部で正則で、 C 上で零にならないとする。このとき $f(z)$ の C 内の零点の個数は以下で与えられる（重複度込み）。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$f(z) = a_m(z-c)^m + a_{m+1}(z-c)^{m+1} + \dots \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-c} + b_0 + b_1(z-c) + \dots$$

となるので、 $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, c\right) = m$. $\left(\frac{1}{1-zg(z)} = 1 + zg(z) + z^2(g(z))^2 + \dots\right)$ □

ルーシェの定理. $f(z), g(z)$ は単純閉曲線 C とその内部で正則で、 C 上では $|f(z)| > |g(z)|$ が成り立つとする。このとき C 内の $f(z)$ の零点の個数と $f(z) + g(z)$ の零点の個数は等しい。

$$h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} \text{ とおくと}$$

$$\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} = (\log(f(z) + g(z)))' = (\log(f(z)) + \log(h(z)))' = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

曲線 C を $\gamma: [\alpha, \beta] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$ とするとき、曲線 Γ を $\tilde{\gamma}: [\alpha, \beta] \mapsto h(\gamma(t)) \in \mathbb{C}$ とすると

$$\int_C \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{h(\gamma(t))} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt = \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}.$$

Γ は 1 を中心とする半径 1 の円内の閉曲線なので、上の値は 0.

よって前定理からルーシェの定理が分かる.

適用例 :

- $f(z) = z^n$, $g(z)$ は $(n-1)$ 次以下の多項式, $C: |z| = R$ は大きな円.
- $z^5 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ は, $\frac{1}{2} < |z| < 2$ の範囲に解を 5 つ持つ.
- $2z^n = \sin z$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は $|z| < 1$ の範囲で n 個ある.

4 あとがき

私は大学の 2 年次から 3 年次にかけて、後に私の指導教員となる小松彦三郎先生や、米国から帰国された小平邦彦先生から複素関数論の講義を受けた。岩波全書の吉田洋一著の「函数論」やアールフォールの「複素解析」（現在は笠原乾吉氏による和訳本がある）などからも学んだ。私自身もより広い話題を含めた本を準備中であるが、自身の怠慢により出版には至っていない。

複素関数論に関しては現在多くの良書が手に入るので特にここには紹介しないが、異色のものとしては井澤裕司著「ビジュアル 複素関数入門」（プレアディス出版）が面白かった。また、この出版社から刊行の千葉逸人著「工学部で学ぶ数学」には多くの数学の基礎分野の知識が簡潔に書かれおり、複素関数論も含まれていて勧められる本と思う。