

Mathematica を用いた最速降下曲線の探究授業の試み

日本大学大学院理工学研究科 佐々木秀馬・柴山将一・木村桂馬・一瀬陽雲,
日本大学理工学部 丸山晃汰・齋藤耕太・鷺尾夕紀子・鈴木潔光・利根川聡・
古津博俊・谷部貴一・平田典子¹, 日本大学豊山女子中高 鷺尾勇介

1 はじめに

我々は2025年3月1日の城西大学における第7回数学教育セミナー「多様化する教育環境における数学教育の実践」にて、曲線の導入の際に受講生に見せるための動的教材を紹介した。その際に聴衆の先生方からの有益なコメントに恵まれ、サイクロイド学習に関連した教材 [5] 等もご教示いただいた。本稿においてはこれらをヒントに、数学ソフトウェア Mathematica で作成した動的教材及び、実際にそれらの教材を用いて2025年6月に実践した授業の様子、そして数学的背景及び今後の課題に関して論じたい。

2 探究授業の提案とそのための教材

主体的対話的で深い学びというスローガンが導入されて久しい。しかし主体的に考える力の育成というものが簡単ではないことは、誰もが認めるものであろう。グループワーク・ペアワーク等による協働学習の機会提供で終わってしまいがちな現状を振り返り、数学を教える際に受講生自らが課題解決に向かえる主体性を育むには、どのような授業が望ましいのかを改めて考えたい。本稿では課題解決に資する考究プロセスが自然に身につけられるように意識して構築した動的教材の一つの試みを報告する。私立大学理工系学部の学生である受講生が自分の考えをまとめた後に、自ら実験を行い、修正と検証を繰り返しながら正しい事実にとどつくことを目指した探究授業のデザイン、そして実験に用いる動的教材について述べる。

授業の題材としてはいわゆるサイクロイドの最速降下性、すなわちボールが転がるときにゴールに最短時間で到達する滑り台の形状がサイクロイドであるという、よく知られている事実をとりあげた。ここでは特に複数のサイクロイドに対して、最速降下競争の場でゴールの位置を自由に動かした場合、最速のサイクロイドがどの形状のものになるのかということをまず受講生自身に予想してもらい、その後に受講生が教材を手で動かしてみても正解を探す、という授業を実施した。動的教材は数学ソフトウェアである Mathematica で作成した。

なお本稿で扱った内容は、受講生がゴールを自由に設定できるようにした最速降下競争における Mathematica 動的教材を主軸に据えた授業実践である。筆者らの調べた限りでは既存の論説では扱われていなかった内容である。講演済の内容 [4] と重複しないように、本稿ではゴールと回転円の半径を共に動かす6節の試行を主に論じたい。

¹E-mail: hiratakohno.noriko@nihon-u.ac.jp

3 サイクロイドの定義

定義 3.1 (サイクロイドの定義) 図 1 において回転する円 C の半径を $CP=CA= a(> 0)$, 円の回転角を $\angle PCA= \theta$ とする. 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (1)$$

で表される曲線をサイクロイド (Cycloid) という. $OA= a\theta$, $CD= a \cos \theta$, $PD= a \sin \theta$ で自転車の車輪である円 C が x 軸上を動くとき, 半径 a の車輪上の定点 P が描く軌跡である.

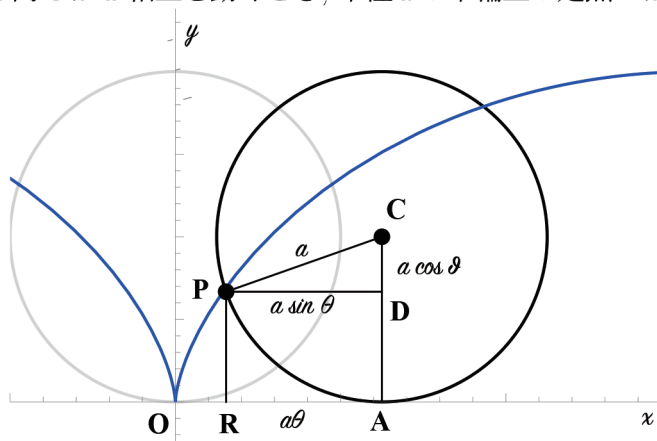


図 1: 回転円の半径 $CP= a > 0$, $OA= a\theta$, 中心の回転角 $\angle PCA= \theta$

定義 3.2 (上下反転版のサイクロイドの数式) 以後は最速降下性の考察のために, 以下の数式による上下反転版 (図 2) を考えることにする.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(\cos \theta - 1) \end{cases} \quad (2)$$

4 最速降下曲線について

ボールが曲線上を滑り落ちるとき, 最短時間でゴールに到達するような曲線の形を求めよう. 本稿ではボールには最初に力を加えず, 摩擦も考えずに重力のみによる落下で運動が始まるものとする. また落下が始まる点 O における曲線の接線は垂直, つまり真下に落下することによってボールの運動が開始するものとして, ゴール地点 G は点 O よりも下に位置すると仮定する. 点 O と G を通る任意の曲線のうちスタートから最も短い時間でゴール G に到達する曲線を求める問いを考える.

この「最速降下曲線」を求める問題は Johann Bernoulli によって 1696 年に Acta Eruditorum という雑誌にて提示されたと言われる. その後 L. Euler を含め様々な研究者によって考えられた [1] [2]. g を重力定数, v を速さとして, 積分

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

を極小にする y を決定する問題になる。これ自身は Euler-Lagrange 方程式を解くことに相当する。この極小値を与える関数 $y = f(x)$ で定まる曲線がサイクロイドを与えることが、解析力学等の教科書にある変分法と呼ばれる手法で証明されるが、方程式 (2) で定まる図 2 の上下反転版サイクロイドで、簡単に証明の概説を行う。

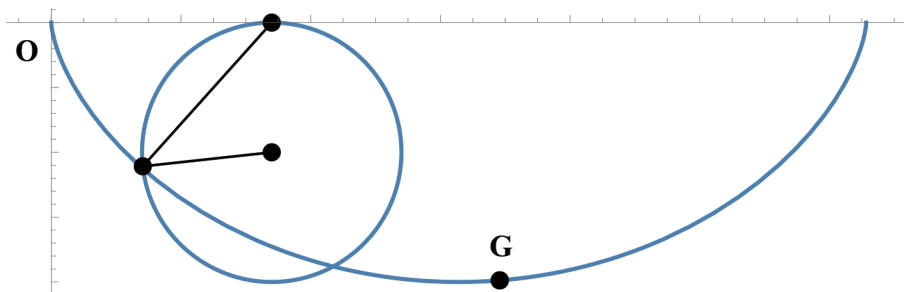


図 2: 上下反転のサイクロイド

4.1 最速降下曲線がサイクロイドである説明

教科書のような解説であるが、最速降下曲線がサイクロイドである説明の概略を述べる。 g を重力定数とする。最速降下曲線の導出は上記のように積分 $\int_a^b \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$ を最小にする y を求めることに相当する。即ち変数 x, y, y' の関数 $L(x, y, y')$ の積分

$$\int_a^b L(x, y, y') dx \quad (3)$$

の極値を与える関数 $y = f(x)$ を求めることになる。Euler はこの関数 $y = f(x)$ が

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4)$$

を満たすことを示した。従って (4) から $\frac{d}{dx} \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$ が得られ、 $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{定数} \gamma$ とおけることから、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1/2g\gamma^2 - y}{y}}$$

が導かれる。この L は Lagrangian と呼ばれるものになる。

次の定理も併せて主張のみを述べておこう。

定理 4.1 ([3]) 点 O と点 G は 3 次元空間 \mathbb{R}^3 内で垂直な壁に見立てた x - y 平面上の 2 点、点 O を原点にとる。 G の y 座標は O の y 座標よりも小さいものとする。 M を x - y 平面内のサイクロイド (回転角はいま 2π までとする)、スタート地点を O とする M の接線の傾きが $-\infty$ であり、なおかつサイクロイド M は点 G を通るものと仮定する。このとき、サイクロイド M は一意的に定まる。そして M は、ボールが点 O を出発して重力のみにより曲線上を滑り、点 G にゴールするまでの最短時間を与える曲線になる。

前半の M の一意性は接線とサイクロイドの方程式から導出される．また一定の解析的条件を満たすとは限らない，あらゆる曲線の族を考えた上で，所用時間の極小値のみならず最小値を与える曲線を決めるには幾何学的考察を要するが，最小値を与える曲線はやはりサイクロイドになることが証明される．詳細は [3, §3, §6, §7] に譲る．歴史的事実については [2, p. 620-622] を参照されたい．

5 サイクロイド同士の比較

上記の定理 4.1 における M が実際にどのようなサイクロイドになるのか，スタートの原点 O を固定し，ゴール G の位置を動かしながら，様々なサイクロイドの上にボールを転がす競争を動的教材で実施して，最速降下曲線を求めることを受講生に試行させる授業をデザインした．

以下，方程式 (2) によって定まる 3 種類のサイクロイドの回転円の半径を，それぞれ a_1, a_2, a_3 ， $0 < a_1 \leq 2 \leq a_2 < a_3$ と仮定する．これらのサイクロイドは，原点 O を通り，なおかつ回転角 θ は $0 < \theta < 2\pi$ とする．

3 種類のサイクロイドにおいて，点 O 以外に通る点を定めると，定理 4.1 から a_1, a_2, a_3 がそれぞれ定まることがわかる．

5.1 時間と回転角の関係について

ここでは，ボールが $a = a_1$ のときのサイクロイド ①と， $a = a_2$ のときのサイクロイド ②と， $a = a_3$ のときのサイクロイド ③の上を転がるときの競争について考える．ボールが出発する点は原点 O としている．最初にゴールを固定し，易しい例を 5.2 節，5.3 節で提示した後，ゴールを動かしながら最速降下曲線を求めることを 6 節で考えた．

3 種類のサイクロイド ①，サイクロイド ②，サイクロイド ③の上のボールに対して，最速降下曲線を求めるためには，原点 O を出発して定点に到着するまでの時間を計算して比較しなければならない．そのために次の事実を示す．

命題 5.1 原点 O を出発してサイクロイド上

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(\cos \theta - 1) \end{cases}$$

を転がるボールが角 θ 回転した点に到着するまでにかかる時間を T とおくと，以下の式が成立する：

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \times \theta. \quad (5)$$

ここで g は重力定数である．即ち，回転円の半径 a が定数ならば， T は回転角 θ に比例する．一方，回転角 $0 < \theta < 2\pi$ が一定ならば， T は半径 a の平方根 \sqrt{a} に比例する．

証明

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(\cos \theta - 1) \end{cases} \quad (6)$$

より、サイクロイドの原点 O からの弧長 s に対して、次が成り立つ：

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \theta}}. \quad (7)$$

点 (x, y) における速さ v は、エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg|y|.$$

つまり

$$v = \sqrt{2g|y|}.$$

一方、点 (x, y) までに要する時間 T は

$$T = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g|y|}} dx.$$

x, y を θ に変換すると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\theta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \theta}} \times \frac{1}{\sqrt{2ga(1 - \cos \theta)}} \times a(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^\theta \sqrt{\frac{a}{g}} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \times \theta. \end{aligned}$$

□

5.2 ゴールが $x = 2\pi$ のとき

命題 5.1 より、回転円の半径が大きいサイクロイドほど、ゴール到達までに時間がかかる。3種類のサイクロイドにおいて点 O 以外に通る点を定めると、定理 4.1 から a_1, a_2, a_3 が定まる。つまりサイクロイド競争でゴールの x 座標と共に y 座標を決めることと、回転円の半径を定めることは同値、即ち回転円の半径からゴールの y 座標が定まる。

$a_2 = 2$ のときのサイクロイド ② においては、 $\theta = \pi$ のときに $x = 2\pi$ である。まず図 3 のように直線 $x = 2\pi$ 上にあるゴールを考えよう。命題 5.1 を用いると、ボールが原点を出発してサイクロイド ② の上を転がるときに、ゴールに到着するまでにかかる時間 T_2 は

$$T_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{g}}. \quad (8)$$

一方、サイクロイド①を例えば $a_1 = 1.3$ とすると、①の上をボールが転がるときに直線 $x = 2\pi$ に到着するまでにかかる時間 T_1 は $x = 1.3(\theta_1 - \sin \theta_1) = 2\pi$ を満たす角 θ_1 に対して計算される値

$$T_1 = \sqrt{\frac{1.3}{g}} \times \theta_1 \quad (9)$$

である。

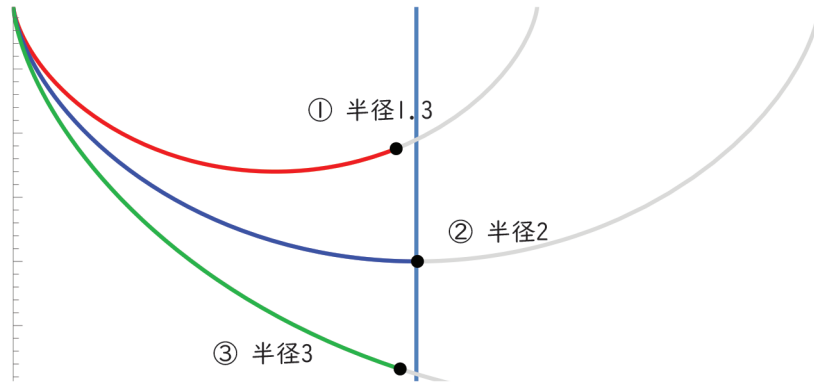


図 3: サイクロイド①(半径 1.3)と②(半径 2)と③(半径 3)の競争

サイクロイド③を例えば $a_3 = 3$ で定めると、③の上をボールが転がるときに直線 $x = 2\pi$ に到着するまでにかかる時間 T_3 は、 $x = 3(\theta_3 - \sin \theta_3) = 2\pi$ を満たす角 θ_3 に対して計算される値であり、以下のようなになる。

$$T_3 = \sqrt{\frac{3}{g}} \times \theta_3. \quad (10)$$

5.3 数値計算による検証

サイクロイド①及びサイクロイド③に比べて、サイクロイド②の上を転がるボールが最も早く直線 $x = 2\pi$ に到着することの証明には、サイクロイド②においてかかる時間をそれぞれ T_k とおいて比較、すなわち $T_2 \leq T_1$ かつ $T_2 \leq T_3$ を示せば十分であるから、

$$T_2 \leq T_1 \iff \theta_1 \geq \sqrt{\frac{20}{13}} \times \pi, \quad T_2 \leq T_3 \iff \theta_3 \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \times \pi$$

を検証すれば良い。逆三角関数の混在のため、明示的な値は求めにくいだが、 $\theta_1 = \sqrt{\frac{20}{13}} \times \pi$ および $\theta_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \pi$ に対して数値計算もしくは、 $\theta - \sin \theta$ のグラフの観察を行うと、 $\theta_1 = 4.05 \dots$, $\theta_3 = 2.61 \dots$, となって、

$$T_2 \times \sqrt{g} = 4.4428 \dots, \quad T_1 \times \sqrt{g} = 4.6177 \dots, \quad T_3 \times \sqrt{g} = 4.5206 \dots$$

□

であるから、 $T_2 \leq T_1$ かつ $T_2 \leq T_3$ が従う。

5.4 直線とサイクロイドとの比較

ここで図4のように直線とサイクロイドとの比較のために、まず回転円の半径 a のサイクロイド上の点 $D(x, -y)$ を考えよう ($y > 0$)。線分 $OD = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。半径 $a = 2$ の回転円で生成されるサイクロイド②では命題 5.1 より

$$T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \theta$$

であった。一方、まっすぐの線分 OD 上をボールが転がって、点 D に到着するまでの時間を T_0 とおくと、加速度が $\frac{gy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ であること、及び運動方程式より、

$$T_0 = \frac{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}{\sqrt{gy}}$$

まっすぐの線分 OD 上をボールが転がり落ちる時間 T_0 よりも T_2 が短いことは

$$T_2 < T_0 \iff \sqrt{\frac{2}{g}} \times \theta < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{y}} \iff \theta < \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{y}}$$

と同値であり、成立する。

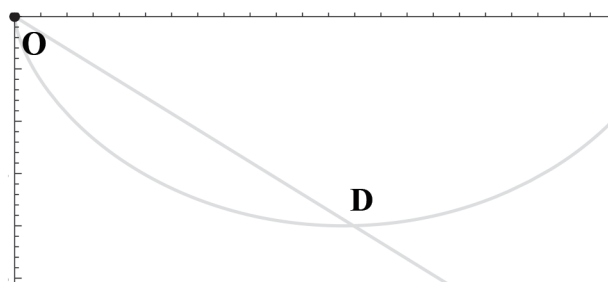


図 4: 原点 O とサイクロイド上の点 D を通る線分 OD とサイクロイドとの競争

6 ゴールを動かしながら試行させる授業及びその動的教材

本節では本稿の主目的である、サイクロイド競争のゴールと回転円の半径の双方を受講生に自由に動かさせながら最速降下曲線を探る授業を報告する。

作成した動的教材を図示する。最初の図5ではゴールを $x = 2\pi$ に設定した。図5の回転円の半径は先と同じく、 $a_1 = 1.3$ のときの赤いサイクロイド、 $a_2 = 2$ のときの青いサイクロイド、 $a_3 = 3$ のときの緑のサイクロイドを描いている。実際には回転円の半径も自由に動かせる Mathematica 教材であり、定理 4.1 よりゴールの y 座標もこれに従い動かせることになる。一方、図6はゴール $x = 3\pi$ の場合で、青いサイクロイドの回転円の半径は3である。図6のようにゴールの位置におけるサイクロイドの接線の傾きは0、つまり水平になるようなサイクロイドが、ちょうど3種類のサイクロイドのうち最もゴールまで早く到達するものになる。この事実を探すために受講生はあれこれと手を動かしていた。

最初にスライダー s を用いてゴールの x 座標を設定し回転円の半径 a_1, a_2, a_3 を動かしながら定めた後、時間 (スライダー t) を動かして受講生にサイクロイド競争を実施してもらった。

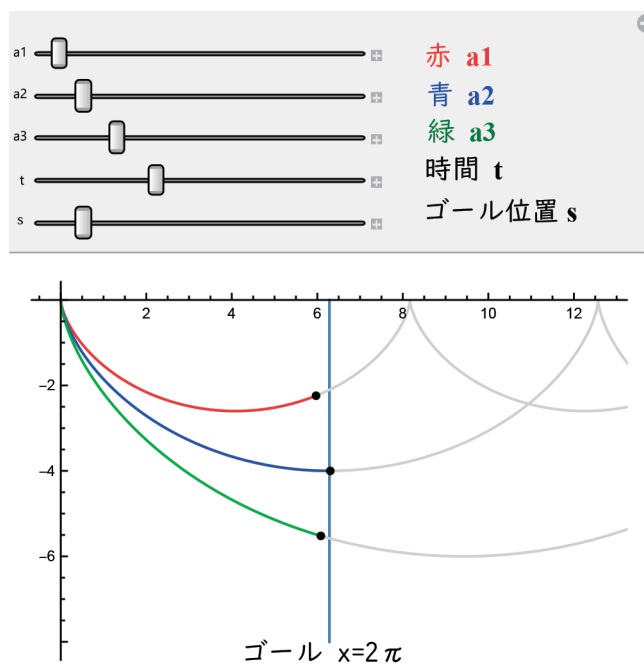


図 5: $x = 2\pi$ にゴールを設定した競争

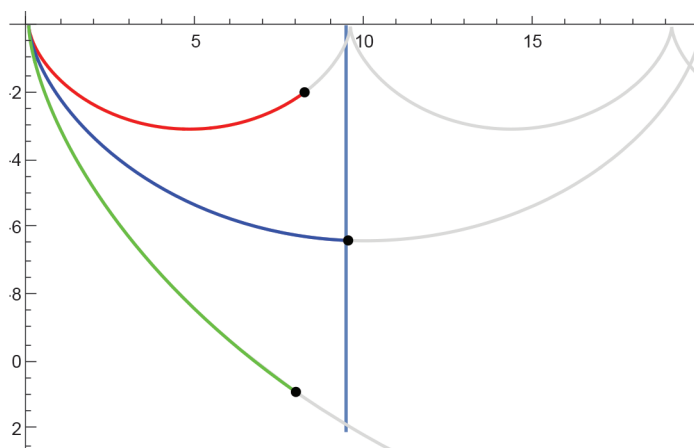


図 6: $x = 3\pi$ にゴールを設定した競争

受講生には以下の問いかけを行った。まず図 7 のように Mathematica 動的教材なしで問うた: 『ゴールの位置を $x = 2\pi$ とは異なる位置にする。自分の好きなゴール、例えば $x = 3\pi$ に 1 着ゴールするサイクロイドの特徴は何でしょう。』その後 Mathematica 動的教材を受講生が自分で動かし、図 8 のように同じクイズに回答した。

実は受講生への説明の際、最初のゴールの設定として誤った数値を伝えてしまったが、受講生は自分で我々の説明を修正し、動的教材を動かして最速降下曲線を探していた。

クイズ (ゴールを変えると? Mathematica まえ・直感で)
 ゴールの位置を $x = 2\pi$ とは異なる位置にする. いま自分の好きなゴール,
 例えば $x = 3\pi$ に 1 着ゴールするサイクロイドの特徴は何でしょう (直感で).

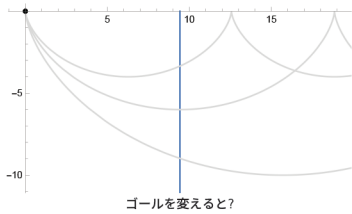


図 7: Mathematica 前

クイズ (ゴールを変えると? Mathematica 後・推測結果を書く)
 ゴールの位置を $x = 2\pi$ とは異なる位置にする. 自分の好きなゴールを決めて
 そこに 1 着でゴールするサイクロイドの特徴は何でしょう?
 (Mathematica 後・自由記述).

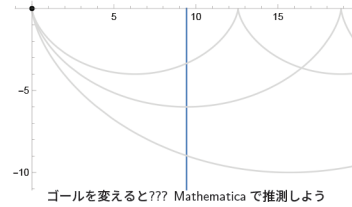


図 8: Mathematica 後

正解は図 9 の通りである. 例えばゴールが $x = 3\pi$ の場合, 回転円の半径が 3 のサイクロイドが最短時間を与えるものになる. その理由は 5.3 節と同様に, 時間の比較で示すことができる. 接線の傾きが 0 になる $\theta = \pi$ のときは, ゴールする x, y 座標が決まるため, 定理 4.1 から回転円の半径も定まるのである.

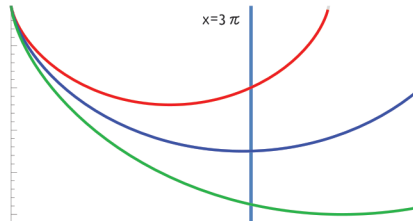
クイズの正解発表

ゴールの位置を $x = 2\pi$ とは異なる位置にする. 自分の好きなゴールを決めて
 そこに 1 着でゴールするサイクロイドの特徴は何でしょう?

正解: ゴールを先に決めると, そこにおける接線が水平になるサイクロイド

接線の傾き $= \frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1} = 0$ となるのは $0 < \theta < 2\pi$ において $\theta = \pi$ のとき.

$a = 3$ のサイクロイドの場合は $\theta = \pi$ のとき, ゴール $x = a(\theta - \sin \theta) = 3\pi$ で,
 ブルーサイクロイドのゴールでの接線は水平.



ゴール $x = 3\pi$ での接線の傾き ブルーサイクロイドでは 0,
 ブルーより半径が小さいと正, 大きいと負

図 9: ゴールを動かしながら試行するクイズの正解

Mathematica 動的教材前の図 7 クイズの正解者は受講生 56 名中, 27 名であった. 動的教材後の図 8 クイズの正解者は受講生 56 名中, 34 名に増えた. 教材を動かすためにかかった時間は 7 分程度であった. Mathematica 動的教材を受講生が自分で動かした後でもわからない, という答えもみられた. 誤答例では最速サイクロイドはゴールの位置に依らない, 等があった. 時間があれば, なぜそうなるのかという理由を考えさせる等の深掘りを丁寧になさせてみたかった. 定理 4.1 の前半の部分の証明は難しくないのに, 対象となる受講生を変更して問い直してみたい.

図 7 と図 8 のクイズでは, 思いのほか正解者が多かったというのが, 我々の感想である.

推察ではあるが、最初に易しい例で状況説明を実施してしまったために、直感的に正解を当てやすかったとも思われる。状況説明用のウォーミングアップを用意せずに、自由記述のクイズをまず問いかけ、少しずつ説明を加える等の工夫が必要だったかもしれない。

7 まとめと今後の課題

サイクロイドというよく知られた題材ではあるが、最速降下曲線であることを見極めるための手段としての Mathematica 動的教材を提案した。少しずつ受講生自身に設定を変えてもらいながら、動的教材を自分の手で動かしてもらい、答えを探るための試行錯誤をさせること自体はできたのではないかと思われる。今後もこのように課題解決の探究プロセスの経験を積み、自分なりに事実を探る大切さと楽しさを味わえる授業を少しでも支えられるような教材を構築してゆきたい。

Mathematica は高価なソフトウェアであり、予算の少ない学校の現場では使いにくいかもしれない。最速降下曲線のレベルならば、GeoGebra 等のフリーソフトウェアで作ることも可能かもしれないが、より高度な数式処理を行いながら動画を示せるソフトウェアを必要とする数学的な内容に負う授業の場合には、現実的にはかなり困難な場合もあることも実感している。動的教材の構築ではなく、既に作られた Mathematica ファイルの再現だけならば安価に済むため、その環境設定及び、様々なソフトウェアによる実装の工夫も行いたい。

謝辞 査読者の先生の丁寧かつ正確なご指摘に感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Ferréol, <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/brachistochrone/brachistochrone.shtml>, 最速降下曲線の曲線動画集, (2017).
- [2] V. J. Katz, History of mathematics: An introduction (2nd ed.), Pearson Education, Addison W. Longman, 1998, 翻訳: ヴィクター J. カッツ, 数学の歴史, 共立出版.
- [3] G. Lawlor, A New Minimization Proof for the Brachistochrone, American Math. Monthly, (1996), **103**, (3), 242–249.
- [4] 佐々木秀馬, 木村桂馬, 丸山晃汰 鈴木潔光, 利根川聡, 平田典子, 自己主導型の学びを牽引する STEAM の動的教材, 公益社団法人日本工学教育協会, 第 73 回年次大会・工学教育研究講演会 (2025 年度 講演番号 3E13), 工学教育研究講演会講演論文集 pp. 352–353.
- [5] 高遠節夫, KeTCindyJS の開発と教育利用, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, RIMS Kokyuroku 2142 巻, 2142-16, 10 pages.