デザート分配に現れる無理数の性質を視覚的教材で示す授業実践

日本大学大学院理工学研究科 柴山将一 · 佐々木秀馬 ·
日本大学理工学部 丸山晃汰 · 齋藤耕太 · 鷲尾夕紀子 · 利根川聡 · 古津博俊 · 鈴木潔光 ·
平田典子[1], 日本大学豊山女子中高 鷲尾勇介

1 はじめに

分配するデザートとして丸いホールケーキ 1 個を考える．円周の長さ 1 の円を考え，本稿では弧度法の代わりに円周 1 の何倍であるかという弧長により，角 α を 0 以上 1 未満のみで表示する．例えば 60° は $\frac{1}{6}$ と表す．この α という角を変えずに，α をケーキ片のおうぎ形の中心角として保ったままで丸いケーキを何回もカットし続けることを考える．カット時には第 1 カットの次の第 2 カットとしては第 1 カットでナイフを入れた場所からカット操作を継続する．操作は何回でも続けられるが，有限回 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, N\alpha$ で止める $N < \infty$ の場合, 最初の角 α に依らず, カットで現れるケーキ片の中心角の大きさが高々 3 種類しか現れないという定理がある [5] [10] [11]．Hugo Steinhaus が提唱した予想で V. T. Sós 等, 複数の研究者により解決され, The three-gaps theorem と称される．

本稿は，デザート分配を題材にする授業が ([8] のように有限回ではなく) 無限回カットの場合に特に整数論的に面白い現象が起きることを受講生に考えさせることを目指した授業を行い，有限回カットとの違い，弧長が有理数と無理数での現象の比較を，Mathematica 動的教材を受講生に自ら動かさせて明確に学ばせる目的での実践報告及び，証明の概略を与えたものである．証明は [4] [6] の内容に負うたもので, 連分数展開を用いない (連分数展開を用いた動的教材に関する [9] との内容は重複しない)．図示には Mathematica を用いた．図 1 から図 3 は弧長 $\frac{9}{50}$ の角 α を中心角に保ちながらケーキを切り続けた図である．

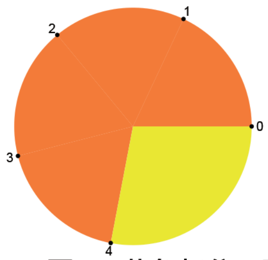


図 1: **カット 4 回目 (黄色部分の弧長は $\frac{14}{50}$)**

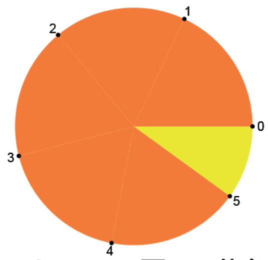


図 2: **カット 5 回目 (黄色部分の弧長は $\frac{1}{10}$)**

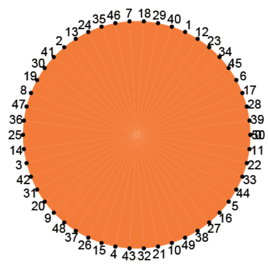


図 3: **カット 50 回目 (上から見たオレンジ部分の弧長は 1)**

[1] E-mail: hiratakohno.noriko@nihon-u.ac.jp

いずれの図もケーキを反時計回りにカットしたもので，カット回数は円周外の小さい数字である． $\dfrac{9}{50} = 0.18$ は有理数であるから，図 3 のように 50 回で弧長 9 に対応，丸ケーキを 9 周するので，結局は弧長 1 になる．これを整数論の用語で「mod 1 で 0」と言うが，小数部分が 0 という意味だけである．図 4 は角 $\dfrac{9}{50}$ によるカット 34 回目で中心角が 3 種類になることを表す．図 5 は別の角によるカット 7 回であるが，角がちょうど 3 種類ならば，最大角が他の 2 角の和になることが一見して分かる図を加えた次第である．この最大角が残り 2 角の和になる事実は，[9] で報告した連分数を用いた形の T. van Ravenstein の主張から従う．

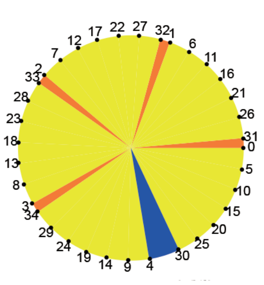


図 4: **カット 34 回目 (中心角 3 種類)**

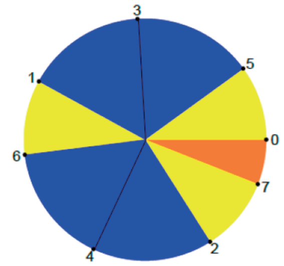


図 5: **青 (最大角)= 黄 + オレンジ**

The three-gaps theorem は任意の弧長でカットし続けて「有限回で止める」場合，ケーキに現れる中心角は高々3 種類という定理であるが，この任意の弧長とは円周 1 の有理数倍でも無理数倍でも良い．この実践結果は [8] に報告した．さらに 3 種類ちょうどが現れたとき，最大角の大きさは残りの 2 種類の角の和に等しい．しかしながら本稿では特に無限回カットのときに起きる現象の考察を，弧長が有理数及び無理数の場合に分けて動的教材を用いて説明した授業と，有限回と無限回の比較に関する実践を報告したい ([8] との内容の重複は避けた)．授業は 2025 年 1 月と 7 月に実践した．

無理数の整数 n 倍の小数部分は，$n \to \infty$ のときに mod 1 で一様分布する（その結果，稠密になる）ことが整数論において知られる [2]．有限回で止めたときに 3 種類のみになる現象は一様分布の事実と矛盾しかねない印象を生むが，有限回カットと無限回カットでは本質的に異なる現象が起きる．その比較がいわば本稿に報告する授業の目的である．

受講生の反応として自由記述に見られたものには面白いものが多かった．こちらも本稿でご紹介させていただきたい．

2 弧長が無理数のときの証明

任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ と定め，$\{x\} = x - [x]$ とおく．$[x]$ と $\{x\}$ をそれぞれ x の**整数部分**, **小数部分**と呼ぶ．区間 $[0,\ 1)$ を弧長 1 の円周と同一視する．任意の無理数 α と任意の正整数 N を固定する．$0 < \alpha < 1$ と仮定し，弧長 1 の円周に点 $\{n\alpha\}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ をプロットする．区間 $[0,\ 1)$ と弧長 $1\left(\text{半径 } \frac{1}{2\pi}\right)$ の円を同一視するとき，この操作は角 α の回転を N 回行い，$n = 1, 2, \ldots, N$ に対して点 $\{n\alpha\}$ を描くことと同義であり，図 6 のようになる．集合 A を以下で定めよう．

$$A = \Big\{\{n\alpha\} \mid n = 1, 2, \ldots, N\Big\} \tag{1}$$

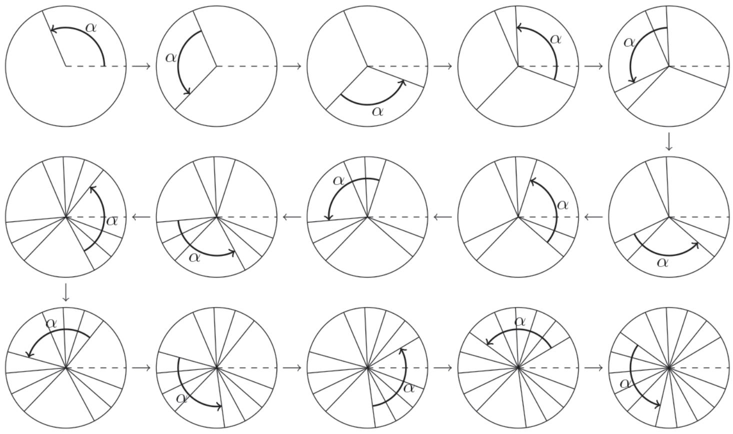


図 6: **角 α で何回もカットし続ける操作**

α が無理数という仮定から，ある数列 $0 < y_1 < \cdots < y_N < 1$ が存在して $A = \{y_1, \ldots, y_N\}$ と表示できる．$\alpha \notin \mathbb{Q}$ より $y_1, \ldots, y_N$ には重複が発生しない．$k = 1, 2, \ldots, N$ に対して

$$\delta_k = \begin{cases} y_{k+1} - y_k & (1 \leq k \leq N-1 \text{ のとき}) \\ 1 - (y_N - y_1) & (k = N \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めよう．この δ_k を y_k と y_{k+1} のギャップと呼ぶ．点 $y_1, \ldots, y_N$ を弧長 1 の円周上の点と同一視したとき，δ_k は y_k から y_{k+1} までの円周上の最短距離を表す．ただし $y_{N+1} = y_1$ と定める．$y_1, \ldots, y_N$ を円周上に描写したものが図 7 である．

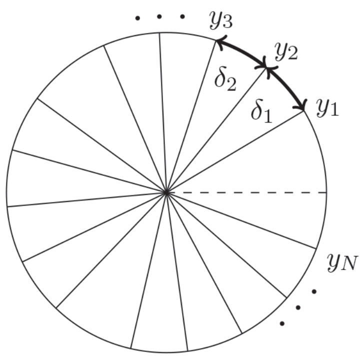


図 7: **角 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ のカットで現れる N 個の円周上の点における隣接 2 点のギャップ**

このとき以下の定理 2.1 が成立する．ここでは $\alpha \notin \mathbb{Q}$ の場合の証明を述べるが，実は $\alpha \in \mathbb{Q}$ の場合も，角の種類が高々3 種類という事実は成立するのである．

定理 2.1 [The three-gaps theorem]
任意の無理数 $\alpha > 0$ と任意の正整数 N に対して，集合 $\{\delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, N\}$ は高々3 個しか元を持たない．即ちギャップは高々3 種類しか存在しない．

証明は [5] [6] [10] [11] 等，またさらなる解説や関連する Step problem と呼ばれる問題については [3] [7] に記述がある．

3　定理 2.1 の証明

$\forall k = 1, 2, \ldots, N$ に対し，組 (y_k, y_{k+1}) をケーキ片と呼ぶ．ケーキ片全体の集合を C で表す．

定義 3.1 $(y_k, y_{k+1}) \in C$ とする．$(\{y_k + \alpha\}, \{y_{k+1} + \alpha\}) \in C$ を満たすとき，(y_k, y_{k+1}) は回転可能であるという．また，回転可能でないとき，回転不可能という．

補題 3.1 任意の $(y_k, y_{k+1}) \in C$ に対して，(y_k, y_{k+1}) が回転可能であるとする．このときある正整数 q が存在して，

$$(\{y_k + q\alpha\}, \{y_{k+1} + q\alpha\}) \in C$$

は回転不可能である．

証明　(補題 3.1 の証明) 任意の回転可能な $(y_k, y_{k+1}) \in C$ を固定する．各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して，$\mathbf{v}(n) = (\{y_k + n\alpha\}, \{y_{k+1} + n\alpha\})$ とおく．回転可能の定義から，$\mathbf{v}(1) \in C$ である．もし $\mathbf{v}(1)$ が回転不可能であるならば，$q = 1$ とおくことで，主張が成立する．また $\mathbf{v}(1)$ が回転可能であるならば，定義から $\mathbf{v}(2) \in C$ である．$\mathbf{v}(2)$ がもし回転不可能であるならば，$q = 2$ とおくことで，主張が従う．$\mathbf{v}(2)$ が回転可能のとき，同様の議論を繰り返す．この議論が無限回繰り返されると仮定して矛盾を導こう．任意の正整数 q に対して，$\mathbf{v}(q) \in C$ が回転可能であると仮定する．このとき，C は有限集合であるから，相異なる正整数 q_1 と q_2 が存在して，$\mathbf{v}(q_1) = \mathbf{v}(q_2)$ が成立する．従って，$\{y_k + \alpha q_1\} = \{y_k + \alpha q_2\}$ となるから，小数部分の定義と $q_1 \neq q_2$ により

$$\alpha = \frac{[y_k + \alpha q_1] - [y_k + \alpha q_2]}{q_1 - q_2}$$

が得られる．これは α が無理数であることと矛盾．以上より補題の主張が示された．　□

証明　(定理 2.1 の証明) 補題 3.1 により，全ての回転可能なケーキ片は，角 α の正の整数 N 倍の回転を行うことで回転不可能になる．ケーキ片の回転でギャップは変わらないため

$$「集合 \{\delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, N\} の元の個数」\leq「回転不可能なケーキ片の個数」\qquad (2)$$

となる．ここで (y_k, y_{k+1}) を回転不可能なケーキ片としたときに，以下の場合分けを行う．

① $\{y_k + \alpha\} \notin A$ または $\{y_{k+1} + \alpha\} \notin A$ の場合，この条件を満たす y_k と y_{k+1} は

$$\{y_k + \alpha\} = \{(N+1)\alpha\} \quad \text{または} \quad \{y_{k+1} + \alpha\} = \{(N+1)\alpha\}$$

に限る．すなわち $y_k = \{N\alpha\}$ または $y_{k+1} = \{N\alpha\}$ の場合の 2 通りのみである．

② $\{y_k + \alpha\} \in A$ かつ $\{y_{k+1} + \alpha\} \in A$ の場合*:* このとき，条件により $(\{y_k + \alpha\}, \{y_{k+1} + \alpha\}) \notin C$ であるから $\{y_k + \alpha\}$ と $\{y_{k+1} + \alpha\}$ の間に $y \in A$ となる元が存在する．これを満たすものは $(y_N, y_1) \in C$ の 1 通りしか存在しない．

従って回転不可能なケーキ片の個数は高々3 個になる．(2) より $\{\delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, N\}$ は高々3 個しか元を持たないことが示された．　□

4　授業実践報告

受講生にはウォーミングアップのための例題クイズとして α が有理数の場合を問うた．

例題 1 題

1 つのケーキを弧長 $0.18{=}\dfrac{9}{50}$ で 1 回切ると, 図のように弧長 $0.18{=}\dfrac{9}{50}$ と弧長 $0.82{=}\dfrac{41}{50}$ の 2 種類のケーキができます.
この動作を繰り返し, 計 5 回切ったとき, 何種類の角度が現れるでしょう.

(1) 2 種類　　(2) 3 種類
(3) 4 種類　　(4) 5 種類

有理数の弧長をもつ中心角の場合のケーキ片については，紙に手で描画したり計算したりすることによってもケーキカット問題の考察ができる．ここでは Mathematica 動的教材の操作方法を示す目的もあって，最初は講師側が Mathematica を動かして図 1 から図 5 の状況を再現し，問題の意味を理解してもらった．この後に様々な角について，Mathematica 動的教材なし，次に Mathematica 動的教材を受講生が自分の手で動かすことで考察を深めてもらった．いずれも簡単な有理数の弧長での有限回カットの場合である．

定理 2.1 の証明は，これまでの研究過程としての関連文献 [8][9] には掲載しておらず，今回この証明の概要を述べた次第である．

次いで無理数の弧長をもつ角の場合として，まず有限回である N 回のケーキカットについて考えてもらい，有理数の弧長の場合との相違点に注意しながら，図 8 の内容を問うた．

受講生の回答状況は図 9 にある．回答としては，無理数の弧長の場合のケーキカットでも，定理 2.1 の無理数の場合の主張自体は，有限回で止めた場合なのであるが，弧長が有理数の場合と同じであるという正解をした者が，42 名中 31 名であり最も多かった．

Mathematica 動的教材を使う前ではあったが，ある程度は正しい洞察ができていたことになる．

無理数で $\boxed{\text{有限回}}$ カット

0 以上 1 未満の $\boxed{\text{無理数倍}}$ の弧長でケーキを切る動作 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{倍など}\right)$ を有限回行う場合を考えたらどのようになると思いますか (自由記述).

図 8: **無理数の弧長をもつ角で有限回カットするクイズ**

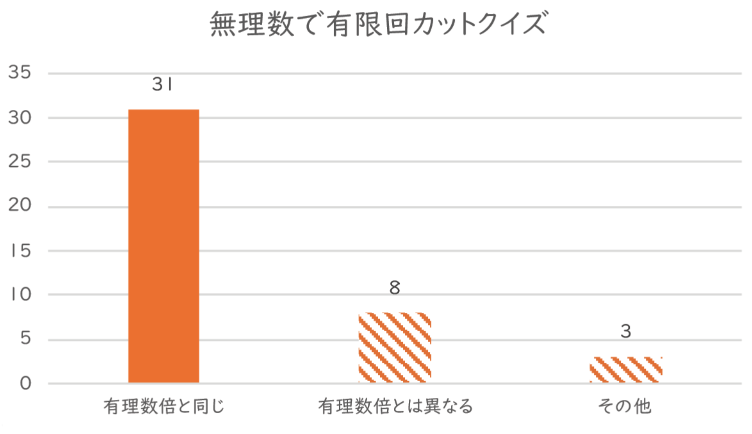


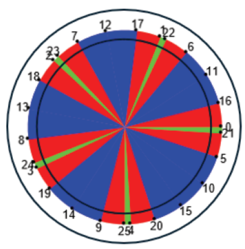
図 9: **無理数の弧長をもつ角で有限回カットした場合の回答**

次に無理数の弧長をもつ角によって，本稿の主目的である無限回カットをしたときの現象について，有限回との比較もしながら，図 10 のように考えてもらうことを実施した．受講生の回答状況は図 11 である．

図 10 のクイズの正解紹介の際には一様分布や稠密という概念を簡単に述べた．無限回と言っても実際は十分大きな有限の回数で確かめるだけであることは申し添える．図 10 のクイズの正解は『円周を成す』であり，円周上にカット時の点がプロットされて一様分布するのである．従って稠密になるという著しい現象が現れる．

無理数で 無限回 カット

0 以上 1 未満の 無理数倍 の弧長でケーキを切る動作を無限回繰り返していくときに，ケーキの角度を上から見たものだけではなく，ケーキの円周上の点の分布を全て考えると，どのようになると思いますか (自由記述)．



上からだけではなく，隠れていた全ての点の分布を見ると ???

図 10: **無理数の弧長をもつ角で無限回カットするクイズ**

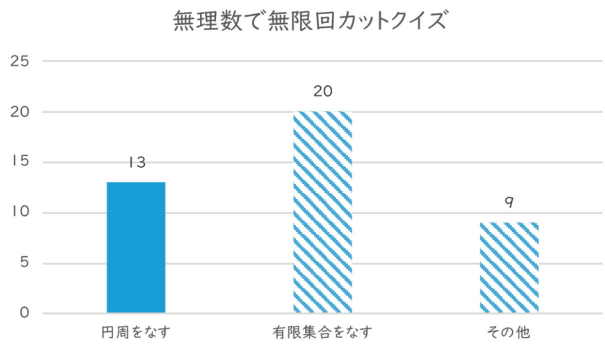
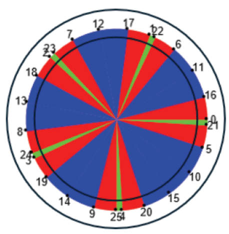


図 11: **無理数の弧長をもつ角で無限回カットした場合の回答**

図 10 のクイズに対する受講生の回答状況は図 11 の通りである．円周上にカット時の点がプロットされて円周を成す，という正解に至った者は 42 名中 13 名．カット時の点がプロットされた点は有限集合をなすという回答（誤答である）が 20 名で最も多かった．その正解の要約が図 12 である．

無理数で無限回カットクイズの正解発表

ケーキを切る動作を無限に繰り返していくときに，ケーキの角度を
上から見たものだけではなく，ケーキの円周上の点の分布を全て考えると，
どのようになると思いますか (自由記述).



上からだけではなく，隠れていた全ての点の分布を見ると ???

答えは以下で与えられる：

- (1) 有理数倍 の弧長で切り始める $\Longleftrightarrow$ 有限個の点のみ
- (2) 無理数倍 の弧長で切り始める $\Longleftrightarrow$ 無限個の点が『稠密』に分布する

図 12: **無理数の弧長をもつ角で無限回カットするクイズの正解**

正解は，**有理数の弧長で 無限回カット** を実施した場合には，カットしたケーキ片のプロット点は必ず **有限個** であり，一方で，無理数 $\times 1$ の弧長で無限回カットを行う場合，**無理数で無限回** カットしたケーキ片の無限個のプロット点は円周上に一様分布，従って稠密になって **円周そのものを成す無限個** である（図 12）．しかし**有理数，無理数いずれの場合も** **有限回カットで止めた場合** の角の種類は定理 2.1 の通り **高々3 通り** である．

5　まとめと今後の課題

本稿における題材はデザートのケーキを無限回カットするということで，身近であってもなじみの薄いものであったかもしれない．しかし講師に倣い, 受講生は Mathematica 動的教材を動かしながらクイズの答を考えることができたため, 不思議な現象が多少は伝わったと考えられる．図 8 図 10 のクイズの回答は，我々の予想よりも正解率が高かったが，これも受講生自身が Mathematica 動的教材を自分で動かした後だったためかもしれない．動的教材を動かしている最中は「おお!」「すごいすごい」などの反応もあった．正答ができた者は, 拍手して喜んでいた．無理数の弧長をもつ角で無限回カットする図 12 クイズの自由記述には「とんでもないことになる」「PC がクラッシュする」などの愉快な回答もあった．無理数を主に扱ったクイズの正解発表時には「納得いかなくない?」という声も聞こえた．これは興味喚起に役立ったかもしれないが，認知プロセスの分析には十分な実践を欠いたためと思われる．査読者のご指摘を活かし, 認知プロセスに資する授業，納得に至ってもらえる授業の実践を，是非これからの重要課題としたい．

今後も受講生が主体的に考えられる動的教材構築や授業デザインについて，工夫したい．

謝辞　査読者並びに編集部の先生がたの丁寧かつ正確なご指摘に感謝いたします．

参考文献

[1] V. Berthé and C. Reutenauer, On the Three-Distance Theorem, *Math. Intelligencer, Gems and Curiosities*,**46**, (2024), 183–188.

[2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley, New York, 1974.

[3] M. Langevin, Stimulateur cardiaque et suites de Farey, *Periodica Math. Hungarica*, **23 (1)**, (1991), 75–86.

[4] F. M. Liang, A short proof of the $3d$ distance theorem, *Discrete Math.*, **28**, (1979), 325–326.

[5] J. Marklof and A. Strömbergsson, The three gap theorem and the space of lattices, *Amer. Math. Monthly*, **124**, (2017), 741–745.

[6] P. Shiu, A Footnote to the Three Gaps Theorem, *Amer. Math. Monthly*, **125 (3)**, (2018), 264–266.

[7] N. B. Slater, Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, (1967), PCPS 63-130, 1115–1123.

[8] 柴山 将一, 一瀬 陽雲, 齋藤 耕太, 鈴木 潔光, 鷲尾 夕紀子, 平田 典子，ケーキカット問題に数学の動的教材を活用する, 日本工学教育協会, 第 73 回年次大会, 工学教育研究講演会 講演番号 3E14, 口頭発表報告集 354–355 (2025).

[9] 柴山 将一, 一瀬 陽雲, 齋藤 耕太, 鷲尾 夕紀子, 鈴木 潔光, 古津 博俊, 平田 典子, The Three Distance Theorem and a Trial to show a Proof relying on Continued Fractions by Mathematica, RIMS 共同研究 (公開型) 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 京都大学数理解析研究所 (2025 年 8 月 27 日).

[10] V. T. Sós, On the theory of Diophantine approximations I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8**, (1957), 461–472.

[11] V. T. Sós, On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$, *Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math.*,**1**, (1958), 127–134.