動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作図
－和算書にある弓形図形を題材として－

愛知県立津島高等学校　山田　潤[*1]

1　はじめに

GIGA スクール構想の実現によって，生徒全員がタブレット端末を利用できる時代となった。定規とコンパスだけでは作図が難しい図形も，動的幾何ソフトウエアを利用すると正確に作図ができる場合がある。数学 A「図形の性質」での定規とコンパスによる作図指導の一層の充実を図るには，動的幾何ソフトウエアのもつ作図機能を利用した作図と定規とコンパスによる作図との違いを明確にし，学習者の ICT 活用能力の向上に寄与できる教材の開発が必要と考えた。

1.1　算法起原集の問題

算法起原集 (さんぽうきげんしゅう．1877 年）は，佐久間纉（さくま・つづき 1819-1896）による江戸時代の和算書にある問題を集めた資料集である。この巻中に関係式（R=a+b+c）に関する問題 [図 1 左] がある。

問 「外円（半径 R）の直径の両端に半径の等しい甲円（半径 a）を内接させる。
　さらにこれらの間に任意の連結する二つの乙円（半径 b）と丙円（半径 c）を内接させる。このとき，外円の半径を甲円，乙円，丙円の半径で表せ。」

術 「外円の半径は，甲円と乙円と丙円の半径の和に等しい。（R=a+b+c）」

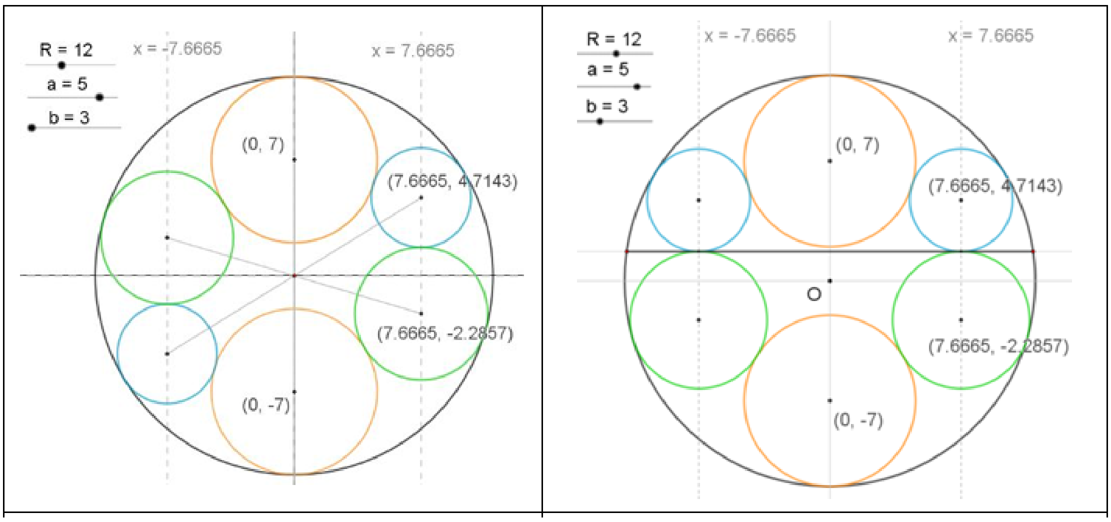

図 1　算法起原集　　　　　　左右を入れ替えた弓形図形

*1 jun.ymd2013@gmail.com

この接円関係にある（円のみに関する）平面図形の問題では，外円（半径 R）と大円（半径 a），中円（半径 b），小円（半径 c）の４つの円の半径の間に，関係式（R=a+b+c）を満たすものが存在する。この関係式を利用すると紋様などの図形を描くことができる。これらの図形の中に，左右対称な（弓形）図形 [図１右] がある。和算書における弓形図形とは，円（板）から弦によって「切り取られる」部分のことである。和算書の問題の場合，「切り取られる」部分の円弧の中心角の大きさが 180° より大きい弧の場合も含む。この左右対称な（弓形）図形は，算法助術図形目録の 24 番，29 番（土倉，2014）として取上げられており，紋様や家紋の作成，反転法（算変法）で利用できる。

1.2　アポロニウスの問題

アポロニウスの問題とは，「平面において与えられた３つの円に接する円を描く問題のこと」である。このアポロニウスの問題は，点 P と直線 L，円 C の３つの要素の組み合わせ（PPP，PPL，PPC，PLC，PLL，PCC，LLC, LCC，LLL，CCC）に，それぞれ同時に接する円を求める問題（半径が０である円を点，半径が無限大である円を直線と拡張して考える）[図２] となることが知られている。

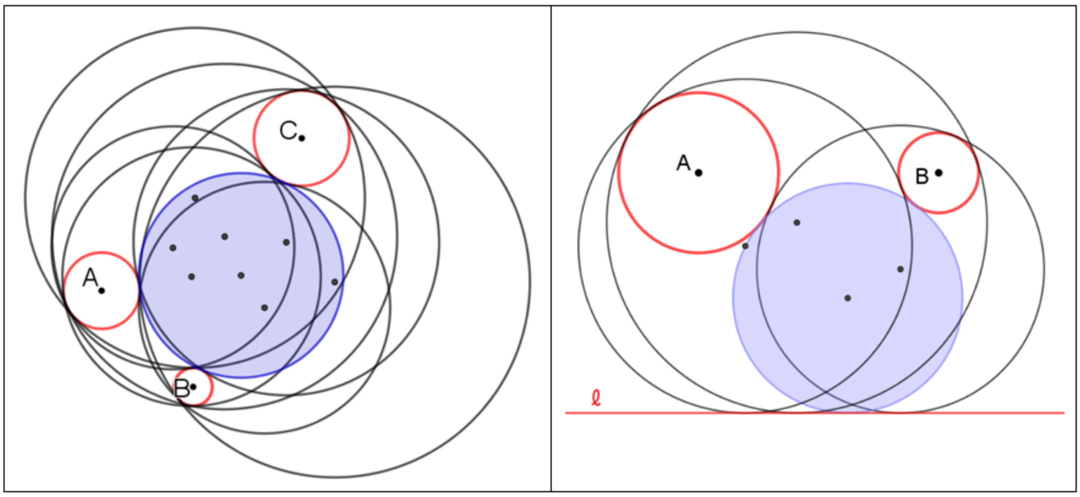

図２　３円に接する場合　　　　　２円と直線に接する場合

和算家今村知商が出版した「竪亥録（じゅがいろく），寛永 16 年」は，日本ではじめて学術的体系をなした算書（平山，2007，39-40）である。この中で，円の弧長と面積等を表す近似公式「弧矢弦の理」や「ピタゴラスの定理（鉤股弦の理）」が述べられている。当時の日本では，まだ（デカルト）座標は知られていなかった。３円が互いに外接する場合には，デカルトの円定理が成り立つが，和算家は公式「三円内容円」（小川，2021，225）を用いて計算することができた。長谷川弘・山本賀前により閲・編纂された和算公式集「算法助術」があった。その新解説・和算公式集「算法助術」（土倉，2014）が出版されており，和算にある問題の解法調べや学習に利用できる。

動的幾何ソフトウエアとは,「作図手順を記憶することができること，作図後に幾何要素（点や直線など）を動かすことにより，自由に作図を変化させせることができる」もの (北本, 2022）とする。具体的には，GeoGebra，Cinderella，GC（Geometric Constructor）などが該当する。これらの作図は，定規とコンパスによる作図（四則演算と開平の操作に対応する）より，高度な作図機能を備えている。ここでは，作図ツール「５点を通る二次曲線」を利用して，関係式（R=a+b+c）を満たす「ひな形」を作成し，弓形図形の作図に利用する。筆者はこれまで，この関係式を利用した平面図形の作図について研究を続けている（山田，2022．2023．2024)。

４つ以上の円に同時に接している弓形図形の問題を，自作することは容易ではない。ここでは,和算書にある４つ以上の円に同時に接する部分がある弓形図形の問題を利用することとした。算額の問題は完成度が高く，見栄えがよい（美しい）ものも多く，和算家の優れた業績を示すことにもなると考えた。しかし，和算には様々な流派があり，流派によるに秘密主義や遺題継承等で正解がよくわからない場合もある。和算書や神社・仏閣に奉納された算額の問題も様々であり，出題（問)，解法（解・術）の仕方も一様ではない。ここでは,（デカルト）座標を利用した解答を作成し，定規とコンパスによる作図の可能性を確認するとともに,「ひな形」を利用した作図例を示すこととした。高校数学での作図指導の充実をはかること，学習者の ICT 活用能力の向上に寄与できる教材の開発を目的とする。

2　山川新宿不動堂の問題

問　今有外円内隔斜等円一個斜截等円三個唯　云外円径一二寸　問等円径如何

答　等円径四寸五分八厘

術　置五個開平法乗外径減外径三段内余二除　得等円径問合

現代語訳

図 [図 3 左] のように，半径 R の円内に４つの等円（半径 r）を内接させたい。等円の半径 r を R で表せ。

答　$R = 12$ のとき，$r = 4.58$（近似値になっている）

術　$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}R$

茨城県結城市の山川新宿不動堂の算額の問題（算法点竄手引艸初編（さんぽうてんざんてびきぐさしょへん，茨城県算額集，1897 年）である。等円の半径 r を外円の半径 R で表す問題で，和算家長谷川弘（はせがわ・ひろむ）の解答が知られている。外円の内部に弦の上側に３個，下側に１個の計４個の等円が収まっている弓形図形の問題である。

座標を利用した解答例

外円の中心を O，半径を R とする。

上側の等円の中心座標を (x_a, y_a)，半径 r，右側の等円の中心座標を (x_b, y_b)，半径 r とする。

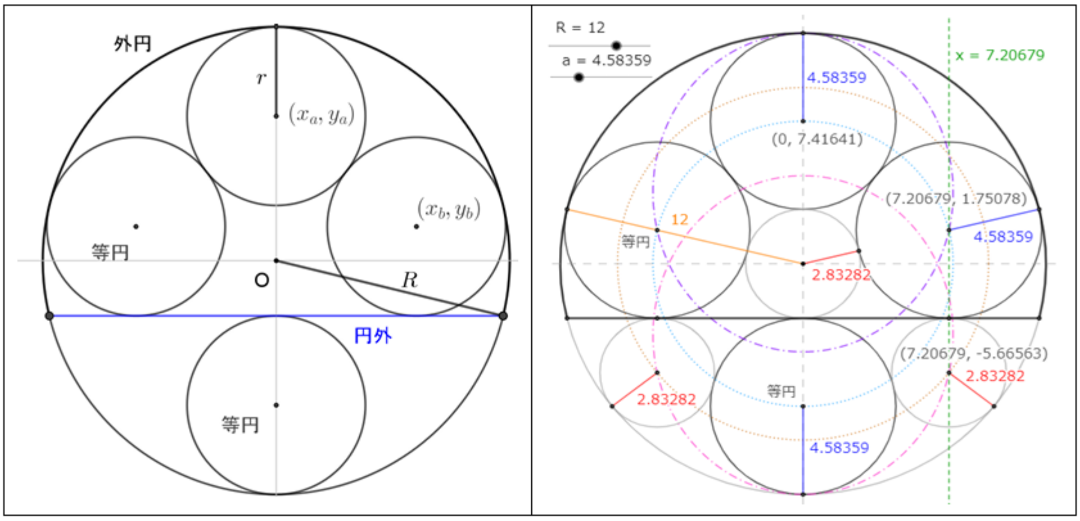

図 3　山川新宿不動堂の問題と作図例

与えられた条件より，$x_a = 0$, $y_a = R - r$, $y_b = 3r - R$ である。
$x_b^2 + y_b^2 = (R - r)^2 \quad \cdots$ ①
$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = (r + r)^2 \quad \cdots$ ②
の連立方程式を解けばよい。

①より，$x_b^2 = (R - r)^2 - (3r - R)^2$が成り立つので，$x_b^2 = 4r(R - 2r)$,
図より，$x_b > 0$ としてよいので，　$x_b = 2\sqrt{r(R - 2r)} \quad \cdots$ ③となる。
②と③より，$4r(R - 2r) + (2R - 4r)^2 = (2r)^2$ が成り立つので，$r^2 - 3Rr + R^2 = 0$ となる。
これより，$r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}R$ である。
条件より $R > r > 0$ としてよいから，$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}R$ である。
各円の中心座標は，$x_a = 0$, $y_a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, $x_b = \sqrt{2(5\sqrt{5} - 11)}R, y_b = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}R$ となる。
$2R = 12$ のとき，等円の半径は $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 6 = 2.83282 \cdots$ となる。さらに，右側の等円の中心座標は $x_b = \sqrt{(2(5\sqrt{5} - 11))} \cdot 6 = 7.20678 \cdots, y_b = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot 6 = 1.7507772 \cdots$ と無理数となるので，定規とコンパスで正確に作図するのは難しい。

この図形は，外円内に 4 つの等円が示されているだけであるが，「ひな形」を利用して作図をしてみると，関係式（R=a+b+c）を満たすことが確認できる。甲円と乙円の半径が等しい場合（$a = b = r$）で，$c = R - 2r = (\sqrt{5} - 2)R$ である。上側の 3 つの円と弦に同時に接する円（この円の中心が，外円 O 中心と一致する）と，丙円の半径（c）とが等しいことが確認できる。
この図形は，外円内に 4 つの等円と 3 つの丙円の合計 7 つの円によって作られた図形とみることができる。GeoGebra は無理数を扱うことができるので，「ひな形」を利用して正確に作図 [図 3 右] できる。

3　東都本郷真光寺天満宮の問題

問　今有如図弧内容五円只云弦八寸小円径一寸問矢幾可

答　矢三寸

術　置小円径六之以弦除之自乗而加四十五箇得数平方開之用減七箇余以除小円径倍之加小円径得数三帰之得　矢合問

現代語訳

長さ $2s$ なる定線分を設け，その中線上に半径 r の 2 円を弦と中線に接するようにする。このとき r に接し，中線上に中心をもつ円 a と，a と r に接する円 b を作り, a と b がある円に内接するようにする。このとき，定線分 $2s$ の両端を通る条件を加えればある円は決定し，$2s$ は弦となる。

このときの矢 $2d$ を s と r で表せ。

答　$2s = 8, 2r = 1$ のとき $2d = 3$

術　$d = \frac{1}{3} \cdot \left\{ r + \frac{2r}{7 - \sqrt{45 + (\frac{6r}{s})^2}} \right\}$

$d = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{7 - \sqrt{45 + (\frac{3}{4})^2}} \right\} = \frac{3}{2}$ より，矢の長さは，$2d = 3$ となる。

東京都の東都本郷真光寺天満宮の算額の問題（1787 年）である。「神壁算法・神壁解」に和算家西尾喜宣の解答がある。甲円と 2 つの乙円と弦の間に 2 個の等円が入る問題である。小円の直径 (1 寸) と弦の長さ（8 寸）から，矢の長さを求める問題である。

座標を利用した解答例

図 [図 4 左] のように，円 A の中心座標を (x_a, y_a)，半径 a，円 B の中心座標を (x_b, y_b)，半径 b, 円 D の中心座標を (x_d, y_d)，半径 d とする。

与えられた条件より，$x_a = 0$, $y_a = R - a$, $x_r = r$, $2d = a + r + y_a - y_r = a + b + y_a - y_b$ である。

$(x_r - x_a)^2 + (y_a - y_r)^2 = (a + r)^2 \quad \cdots$ ①

$(x_b - x_r)^2 + (y_b - y_r)^2 = (b + r)^2 \quad \cdots$ ②

$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_r)^2 = (a + b)^2 \quad \cdots$ ③

$x_b^2 + y_b^2 = (R - b)^2 \quad \cdots$ ④

の連立方程式を解けばよい。

この連立方程式を解くと, $R = \frac{4d^2 + s^2}{4d}$ と, s と d で表せる。このとき, $d = \frac{-3(2r^2 - s^2) \pm s\sqrt{4r^2 + 5s^2}}{2(s^2 - 9r^2)} r$ となる。条件より，$d > r > 0$ としてよいので，$d = \frac{-3(2r^2 - s^2) + s\sqrt{4r^2 + 5s^2}}{2(s^2 - 9r^2)} r$ である。

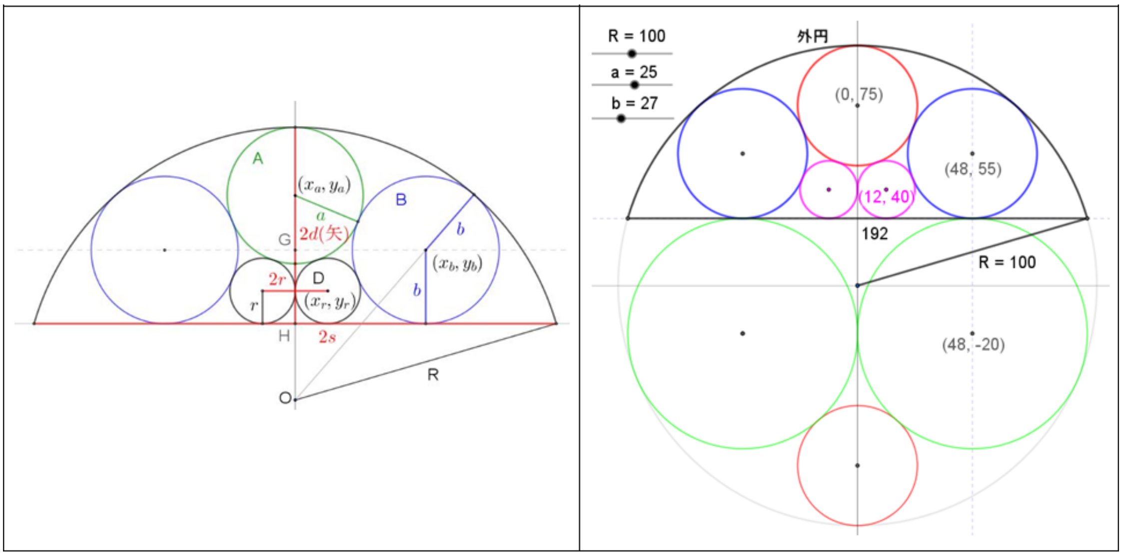

図 4　東都本郷真光寺の問題と作図例（R=100 のとき）

$2s = 8, 2r = 3$ のとき，矢の長さ $2d$ は，$2d = 3$ と求められる。

各円の中心座標は $x_a = 0, y_a = \frac{75}{24}$，$x_b = 2, y_b = \frac{55}{24}$, $x_r = \frac{1}{2}, y_r = \frac{5}{3}$ とすべて有理数となる。また，$R = \frac{4(\frac{3}{2})^2+4^2}{4\frac{3}{2}} = \frac{25}{6}$，$a = \frac{25}{24}$，$b = \frac{9}{8}$ となるので，この図形は定規とコンパスでの作図が可能である。

この弓形図形は関係式 (R=a+b+c) を満たすので $c = \frac{25}{6} - \frac{25}{24} - \frac{9}{8} = \frac{48}{24}$ である。2 つの円 D の中心座標は $(\pm\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$，半径 $\frac{1}{2}$ の円となるので，「ひな形」を利用して作図できる。

例えば，外円の半径を 100（寸）とすると，外円の内部のすべての円の中心座標と半径が整数である図形 [図 4 右] を描くことができる。

4　桑名住吉社の問題

問　今有如図半円内容甲乙丙丁六円只云丁円径三百七十三寸問乙円径幾何

答　乙径一千八十七寸〇〇有奇

術　置二个平方開之加一个五分乗丁径得乙径合問

(愛知県算額集より)

現代語訳

図 [図 5 左] のように，半円の中に 6 個の円が接しながら入っている。丁円の直径 $2r$ が 373 のとき，乙円の直径 $2y$ を求めよ。

答　$2y = 1087.00\cdots$

術　$2y = 2r(\sqrt{2} + \frac{3}{2})$

三重県桑名市の住吉社にある算額の問題（年代不詳）である。半円の中に，甲円と２つの乙円と弦の中に３つの円が入る問題である。続愛知県算額集の中に和算家の永田敏昌の解答が示されている。丁円の直径が 373 寸のとき，乙円の直径を求める問題である。

座標を利用した解答例

外円，甲円，乙円，丙円，丁円の半径をそれぞれ，R, a, b, c, r $(R > a > b > c > r > 0)$，第１象限にある乙円の中心座標を (x_b, y_b)，丙円の中心座標を (x_c, y_c)，丁円の中心座標を (x_r, y_r) とする。

与えられた条件より，$x_a = 0$, $y_a = R - a$, $x_r = 0$, $y_r = r$，$y_c = c$ ，$y_b = b$ ，$R = 2a + 2r$ である。

$x_b^2 + y_b^2 = (R - b)^2 \cdots$ ①

$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 = (b + c)^2 \cdots$ ②

$(x_c - y_r)^2 + (y_c - y_r)^2 = (c + r)^2 \cdots$ ③

$(a + c)^2 = x_c^2 + (R - a - c)^2 \cdots$ ④

$(a + b)^2 = x_b^2 + (R - a - b)^2 \cdots$ ⑤

の連立方程式を解けばよい。

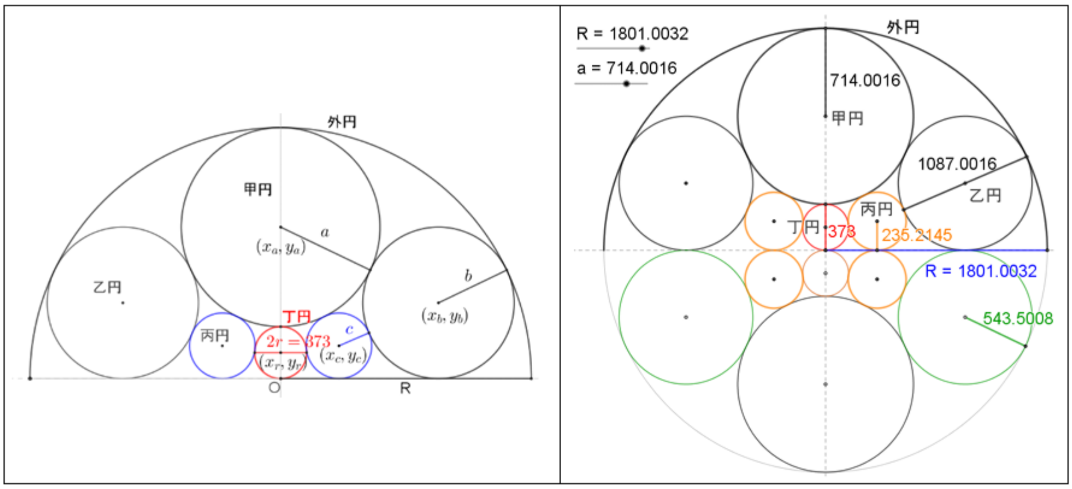

図５　桑名住吉社の問題と作図例

この連立方程式を解くと，

$a = \frac{3-\sqrt{2}}{4}R$，$b = \frac{1+\sqrt{2}}{8}R$，$c = \frac{2\sqrt{2}-1}{14}R$，$r = \frac{\sqrt{2}-1}{4}R$ より，$R = 4(\sqrt{2} - 1)r$，$b = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}r$ となるので，$2r = 373$ のとき，$2b = 1087.001658 \cdots$ である。

このときの各円の中心座標は，$x_a = 0$，$y_a = \frac{1+\sqrt{2}}{4}R$，$x_b = \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}R$，$y_b = \frac{1+\sqrt{2}}{8}R$，$x_c = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\sqrt{\frac{2(3+\sqrt{2})}{7}}R$，$y_c = \frac{2\sqrt{2}-1}{14}R$，$x_r = 0$，$y_r = \frac{\sqrt{2}-1}{4}R$ であり，各円の中心座標は無理数となるので，定規とコンパスでの作図は難しい。

この弓形図形（半円形）は，関係式 (R=a+b+c) を満たすので，$r = \frac{373}{2}$ のとき，$R = 4(\sqrt{2}-1)r = 1801.0032 \cdots$ ，$a = \frac{3-\sqrt{2}}{4}R = 714.0016 \cdots$，$b = \frac{1+\sqrt{2}}{8}R = 547.50079 \cdots$，$c = \frac{2\sqrt{2}-1}{14}R =$

$235.2145\cdots$ となる。

丁円の直径（円径）が 373 のとき，乙円の直径は無理数となるが，GeoGebra は無理数を扱えるので,「ひな形」を利用して正確に作図 [図 5 右] できる。

5　熱田神宮の問題

問　今有如図弧内容七円只云上円径若干問得中円径術如何

答　置上径二帰之得中径合問

答　$y = 2x$

現代語訳

図 [図 6 左] のように直線 l 上に中心をもつ円 y を描く。次にこれに接する円 x を作る。さらに x, y に接する円 b を 2 個及びその共通接線 l' が一つの円（これを a とおく）を内接するように a を作る。x, y が決まれば b が決まる。さらに b と y に外接する円 C を作るとき，c と l' と b に接する円 a' がきまる。$a = a'$ のとき，x を y で表せ。

答　$y = 2x$

愛知県名古屋市熱田区にある大須観音の算額の問題（1842 年）である。弓形図形の中に 7 つの円が互いに外接している問題であり，中円の半径を上円の半径で表す問題である。愛知県算額集には，和算家の解義はないと記されているが，大野智恵による解説（深川，1983，35-36）がある。

座標を利用した解答例

上円の中心座標を (x_a, y_a)，半径 a，中円の中心座標を (x_m, y_m)，半径 y，下円の中心座標を (x_u, y_u)，半径 a，円 B の中心座標を (x_b, y_b)，半径 b，円 D の中心座標を (x_d, y_d)，半径 a' とする。

与えられた条件より，$x_a = x_m = x_u = 0$，$y_a = R - y$，$y_b = R - (2x + 2y + 2a) + b$，$y_m = R - (2y + x)$，$y_u = y_d = R - (2y + 2x + a)$，$a = a'$ である。このとき，

$(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2 = (a + b)^2 \quad \cdots$ ①

$(x_d - x_b)^2 + (y_d - y_b)^2 = (a + b)^2 \quad \cdots$ ②

の関係式が成り立つ。

①より，${x_b}^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$，$x_b > 0$ より，$x_b = 2\sqrt{ab}$ となる。

②より，$(x_d - x_b)^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$，$x_d - x_b > 0$ より，$x_d - x_b = 2\sqrt{ab}$ だから，$x_d = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab}$ である。

$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = (y + b)^2 \quad \cdots$ ③

$(x_b - x_m)^2 + (y_b - y_m)^2 = (x + b)^2 \quad \cdots$ ④

${x_b}^2 + {y_b}^2 = (R - b)^2 \quad \cdots$ ⑤

${x_d}^2 + {y_d}^2 = (R - a)^2 \quad \cdots$ ⑥

の連立方程式を解けばよい。

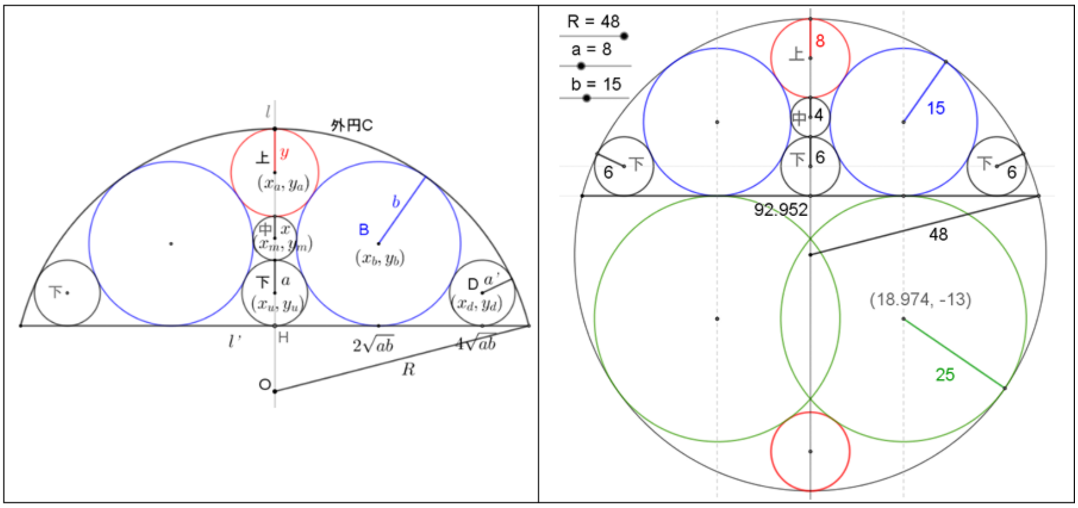

図 6　熱田神宮の問題と作図例

この連立方程式を解くと，$y = 2x$ が求められる。

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x(x+y)}$，$b = a + \frac{3}{4}(x+y)$，$R = a + x + y + \frac{4ab}{x+y}$ と，x と y で表せるので，$a = \frac{3}{2}x, b = \frac{15}{4}x, R = 12x$ となる。

$x = 4$ とすると，各円の半径は $y = 8, a = 6, b = 15, R = 48$ となり，すべて整数である。

$x_a = 0, y_a = 40, x_b = 6\sqrt{10}, y_b = 27, x_d = 12\sqrt{10}, y_d = 18, x_m = 0, y_m = 28, x_u = 0, y_u = 18$ であり，円 B と円 D の中心の x 座標に無理数 $\sqrt{10}$ を含む。無理数は $\sqrt{10}$ だけであるので，$\sqrt{10}$ を定規とコンパスで描けば，正確に作図できる。

この問題は，上円と中円の円径（直径）の比 2 : 1 を求める問題であるが，関係式 (R=a+b+c) を満たすので，$R = 48, a = 8, b = 15$ のとき，$c = 25$ であり，「ひな形」を利用して作図 [図 6 右] できる。

6　考察

東都本郷真光寺天満宮の問題は，外円の半径 R と各円の半径がすべて有理数となる。また，各円の中心座標も有理数の組で表すことができるので，定規とコンパスでの作図は可能である。熱田神宮の問題は，外円の半径を $R = 48$ とすると，各円の半径がすべて整数となるが，円 B と円 D の x 座標は無理数である。結城市山川新宿不動堂の問題は，外円の半径が $r = 12$ のとき，等円の半径は無理数である。また，左右にある等円の中心座標も無理数である。桑名住吉社の問題は，丁円の直径が 373 寸のとき，甲円，乙円，丙円だけでなく，外円の直径も無理数であるので，定規とコンパスでの作図は難しい。

和算書にある弓型図形の中には，正確な作図まで求めていない問題も多く，定規とコンパスでの作図が難しい場合がある。ここでは，（デカルト）座標を利用した解答を示し，各円の中心座標と半径を求めた。（デカルト）座標を利用する解法に統一したため，必要な連立方程式の数，解法を

通してこれらの弓形図形の難易度もわかりやすくなる。円の中心座標と半径を求めることにより，定規とコンパスによる作図の可能性を知ることができる。これら 4 つの弓形図形の問題は，「ひな形」と GeoGebra のもつ作図機能を利用すると正確に作図できる。

算額の問題は，作成された時代も作成者も様々である。問題は漢文で与えられており，解法も傍書法（筆算代数）で示されているため初学者が問題を正確に理解し，解くことは難しい。現在用語で問題を提示し，（デカルト）座標で解答を与えることにより，高校生にも扱いやすい問題になる。また，同様の連立方程式を解くことになるため，それぞれの問題の難易度も比較しやすくなる。算額の解答や和算書にある解法を調査することにより，和算家たちの優れた能力と解法を追体験できる教材として活用できる。

和算書にある弓形図形の作図を，動的幾何ソフトウエアのもつ定規とコンパスの機能で代用するだけでなく，定規とコンパスだけでは限界がある作図を GeoGebra のもつ作図機能を利用して正確に作図する活動によって，ICT 活用についての可能性や有用性を示す機会ともなる。「算法起源集」にある問題の解答からは，関係式（R=a+b+c）を用いた様子は見られない。和算書にある弓形図形のうち関係式（R=a+b+c）を満たす問題の解答例としてまとめることにもなった。和算書にある平面図形の問題を教材とすることにより，和算の歴史と和算家の業績を知る機会ともなり，「伝統や文化に関する教育の充実」（文部科学省，2018，5）にも繋げられる教材と考える。

7　謝辞

本研究は，第 7 回数学教育セミナー「多様化する教育環境における数学教育の実践」での講演内容をもとに作成したものです。発表の機会をお与えいただきました主催者の先生方に，厚くお礼申し上げます。また，論文作成にあたって，査読者の先生方には貴重なご意見を賜りました。謹んで厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] GeoGebra 日本，https://sites.google.com/site/geogebrajp/，（2025.5.14 参照）
[2] 平山諦，和算の歴史，筑摩文芸文庫，（2007）
[3] 深川英俊編，続々算額の研究，鳴海土風会，（1983）
[4] 深川英俊，トニー・ロスマン，聖なる数学：算額，森北出版株式会社，（2010）
[5] 北本卓也，探究的な活動のための動的幾何ソフトウエアの活用について，数式処理 28-2, 35-51，（2022）
[6] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説 総則編，学校図書，（2018）
[7] 小川 束，和算－江戸の数学文化，中央公論新社，（2021）
[8] 佐久間纘，算法起原集，京都大学数学教室貴重書ライブラリー，rb00028490, https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028490，（2025.5.14 参照）
[9] 土倉保編著，新解説・和算公式集 算法助術，朝倉書店，（2014）

[10] 山田 潤，高校数学における課題学習教材の作成　－円のみに関する問題－，春季年会予稿集，数学教育学会，（2022），127-129.
[11] 山田 潤，動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作成についての一考察　－和算書にある平面図形問題の利用－，数理解析研究所講究録 2273．数学ソフトウエアとその効果的教育利用に関する研究.（2023），170-177.
[12] 山田 潤，動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作図についての一考察－関係式 R=a+b+c の利用－，春季年会予稿集，数学教育学会，（2024），105-107.