Proof without words（見てわかる証明）の数学教材開発と実践

豊田工業高等専門学校 一般学科 笠谷 昌弘[1]

1 はじめに

Proof without words (以下, しばしば PWW と略す) とは, 数学における証明を可視化することで言葉や数式による説明を最小限にとどめ,「見てわかる証明」を実現する図式のことである. たとえば, 自然数の和公式を表す PWW の例として, 次の図式はよく知られている.

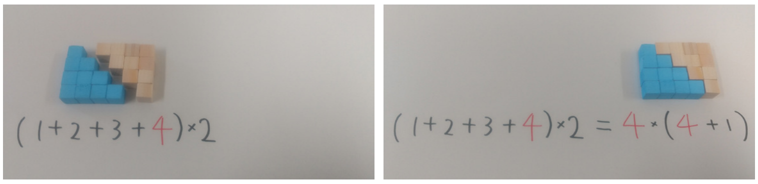


図 1: 自然数の和公式の PWW

この図式は, $n = 4$ の場合に限らず可能であるのは明らかであろう. すなわち,

$$
\begin{aligned}
(1 + 2 + \cdots + n) \times 2 &= n \times (n + 1) \\
\therefore 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

PWW は, Mathematical Association of America (アメリカ数学協会) の出版する Mathematics Magazine などで定期的に公開されており, Roger B. Nelsen によりそれらをまとめた書籍がこれまで 3 冊出版されている [N1, N2, N3]. また, 一部をピックアップし日本語による解説を加えた和訳版が, 秋山・奈良・酒井により, これまで 2 冊出版されている [ANS1, ANS2].

そもそも証明とは, 数学という学問において, 数式や命題の正しさを保証するために必須のプロセスである. しかし数学教育において, 学習者にとって証明は単純な計算よりも習得に困難を要することが多い. また, 煩雑な途中式による証明や論理的に厳密すぎる議論は, ともすれば学習者の興味を失い, 学習を継続するのに困難さを伴う場合がある. 筆者は, 証明教育の数学的必要性と学習者の困難性のギャップを補うものの 1 つが PWW であり, PWW には数式・命題を学習者に強く印象付け, 興味を喚起する効果があると考えている.

PWW 的な可視化は, ("PWW" という単語は表に出ないが) 日本の一部の数学教科書では公式の説明や導出に用いられることがある. たとえば, 高等専門学校 (高専) などでしばしば採用されている, 高遠らによる基礎数学の教科書 [T] においては, 相加平均と相乗平均の関係についての補足説明として, 2 つの円と直線が接する図を用いた可視化を紹介して

[1]E-mail: kasatani[AT]toyota-ct.ac.jp ([AT] はアットマークに置換してください.)

いる ([T], p.60) が, これは [N1] の p.51 の図と本質的に同等である. また, sin と cos の加法定理について, 単位円に付随する直角三角形を用いた可視化によって導出している ([T], p.158) が, これは [N2] の p.46 に掲載されている図とほぼ同一である.

本稿では, PWW を教材化し, 高専生を主な対象として授業内外で実践した, 筆者の近年の取り組みを概観し, いくつかの具体的な教材とその実践例を紹介する. 本稿は, 2025 年 3 月に城西大学の数学教育セミナーで行った発表 [K11] のアウトラインを元にして, 新たな視点や分析を加えたものである.

2　取り組み内容の概観

筆者による PWW に関する近年の取り組みについて, 最初に全体像を様々な視点から概観しよう.

2.1　数学的題材別リスト

まず, 筆者のこれまでの論文や発表で言及した PWW を, 数学的題材別にリストアップすると次のようになる.

- 自然数の 2 乗和公式 [K1, K2, K4, K5]
- 自然数の 3 乗和公式 (known) [K1, K2, K4, K5]
- 平方三角数 (と矩形三角数) [K3, K9]
- 三角関数の和積・積和公式 (known) [K5]
- 相加平均と相乗平均の関係 (known) [K5, K6, K10]
- cos の加法定理 (と sin の減法定理) [K6, K10, K12]
- 2 次関数の 1/6 公式など, ベータ関数の自然数格子点における値 [K7]
- $(a+b)^2$ や $(a+b)^3$ の展開, a^2-b^2 の因数分解 (known) [K8]
- sin と cos の相互関係 (known?) [K10]

2.2　様々な実践手法

次に, PWW 図式を教材化し, 実践した際の手法別に分類すると, 主に次の 4 種類に分けられる.

1. 少人数授業

   自然数の 2 乗和・3 乗和や, 平方三角数について, 筆者が当時所属していた学校 (富山高等専門学校. 以下, 富山高専) において, 放課後や長期休み中に, 希望学生を対象とした課外授業を不定期に行った.

また, 富山高専 JST ジュニアドクター育成塾の企画の 1 つとして, 2022〜2024 年度に少人数講座を行った．これは, 受講生自身が木材工作を通じて, 自然数の和・2 乗和・3 乗和の公式を導くものである．講座で用いた自然数の 3 乗和公式の PWW 図の例は, 図 2 を参照されたい．必要な知識として, 累乗記号と簡単な文字式が理解できればよいので, 地域の中学 1 年生〜3 年生を対象としていた.

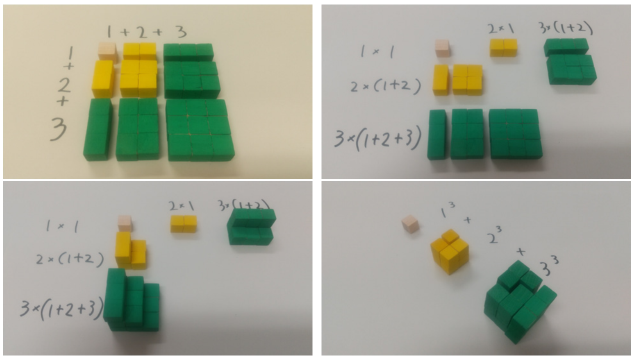


図 2: 自然数の 3 乗和公式の PWW

これらの少人数授業型の実践の特徴として, 1 人 1 人の顔・反応が見える利点がある. 一方で, PWW の考え方を広めるという観点で見ると, マンパワーに限界がある.

2. 動画教材

PWW 図式から動画教材を作成し, それを見せながら簡単な解説を実施するものである．実践例としては, 自然数の 2 乗和・3 乗和公式を扱う富山高専の数学科目 (高専 1 年生) の授業内で, その PWW 図式を紹介した.

この手法の特徴として, 授業内で 1 クラス約 40 人相手に比較的短時間で実践できるという利点がある．その一方で, 筆者のスキルでは見栄えのよい動画を作るのは非常に大変であり, 動画教材の量産は難しいという問題があった.

3. Microsoft Forms を用いた Web クイズ

PWW 図式を, いくつかの簡単なステップに分割し, 多肢選択式の Web クイズに加工したものである．この手法の第一の目的は, 解答にたどり着き PWW の面白さや命題の納得感などを得る体験を**学習者が自力で**味わえるようにすることである．したがって, 元となる図式は Proof **Without Words** ではあるが, 適宜, **言葉による説明**も加えている．しかしその PWW 図式がもつ数学的本質や面白さは損なわないように注意を心掛けて Web クイズに加工した．フォームの 1 ページ目は Web クイズとし, 2 ページ目以降はその教材を体験した際のアンケートを付属した.

いくつかの教材 (相加相乗, 加法定理, 相互関係) とその実践結果は, 後の節で具体的に紹介する.

この手法の特徴として,

- 授業内だけでなく授業外でも, 学生が自力で手軽に体験しやすい
- クイズとアンケートをセットにすることで, 効果を分析しやすい

- 動画に比べ, 教材を作成しやすい

など, 利点は多い. しかし一方で, 内容の大部分を, 与えられた選択肢による誘導形式にする必要がある, という制約がある.

4. グループワークで PWW 図式を探究する活動の試み

   これは, まず準備として簡単な PWW 図式を紹介し, まず学生に PWW 的な考え方を教える. 実践では, 準備として $(a+b)^2$ の展開や a^2-b^2 の因数分解の PWW を紹介した. 次に本題として, 準備活動で紹介した PWW の発展形である, $(a+b)^3$ の展開 (や a^3-b^3 の因数分解) の PWW を学生にグループ単位で探究させ, 発見させる活動である.

   この試行的手法の特徴として, 学生自身に探究・発見・グループ内で共有させる活動であるので, 実践時間をかなり多く確保する必要がある. したがって通常の授業の「余った時間で」あるいは「気軽に」実施するのは難しいであろう. また, 筆者の授業設計もまだ洗練されていない部分がある. その一方で, 普段の授業では見られない能動的な活動や自由な発想を学生が示すことがあり, 今後の実践方法の洗練次第では深い学びにつながる可能性があるため, まだ試行的段階ではあるが, ここに紹介することとした.

2.3 PWW の対応関係メカニズム・タイプ

PWW を分類する一形態として, 対応関係メカニズム・タイプ別による分類が考えらえる.

- 離散的な対応

  そもそも「PWW の対応関係メカニズム・タイプ」とは何か. 筆者は, PWW 図式により可視化が実現されるメカニズムの大きな要素として「全単射」があると考えている.

  一例として, 本稿の「はじめに」で紹介した, 自然数の和の PWW がなぜ実現されるのかを考察する. 等式

$$(1+2+3+4)\times 2 = 4\times(4+1)$$

  の左辺の可視化として直角三角形型に並べたブロックの個数を数えることは, 1〜10 および 11〜20 の自然数を

①　⑳⑲⑱⑰
②③　⑯⑮⑭
④⑤⑥　⑬⑫
⑦⑧⑨⑩　⑪

  のように配置することを意味する.

また, 右辺の可視化として長方形型に並べたブロックの個数を数えることは, 1〜20 の自然数を

①②③④⑤
⑥⑦⑧⑨⑩
⑪⑫⑬⑭⑮
⑯⑰⑱⑲⑳

のように配置することを意味する. したがって, 自然数の和公式 左辺=右辺 という等式は, 1〜20 の自然数という離散的な要素間の全単射を意味する.

平方三角数 (と矩形三角数) について筆者らが開発した PWW 図式 [K3, K9] は, 離散的な対応タイプである.

自然数に関する公式・命題の PWW は離散的なタイプをとることも多いが, 次に述べるように, 自然数に関する PWW すべてが離散的なタイプのみにより実現されるとは限らない.

- 面積を用いた対応

  このメカニズム・タイプの例としては, 相加平均と相乗平均の関係 [K5, K6, K10], cos の加法定理や sin の減法定理 [K6, K10, K12], $(a+b)^2$ の展開や a^2-b^2 の因数分解 [K8], などである.

- 体積を用いた対応

  このメカニズム・タイプの例としては, 自然数の 2 乗和公式や自然数の 3 乗和公式 [K1, K2, K4, K5], 2 次関数の 1/6 公式 [K7], $(a+b)^3$ の展開や a^3-b^3 の因数分解 [K8], などである.

- 長さや座標を用いた対応

  このメカニズム・タイプの例としては, 三角関数の和積・積和公式 [K5], sin と cos の相互関係 [K10], などである.

上記の分類を見ると, 数式・命題に含まれる文字や関数といった要素の「次数」と, 可視化された図形の「次元」が同じであることが比較的多いことが分かる. これは, PWW 図式を素朴に作ろうとすれば, 文字の次数と同じ次元の図形をまず考えてみるのが最も自然な考え方だからであろう. しかしながら, 相加平均と相乗平均の関係, 自然数の 2 乗和公式, sin と cos の相互関係など, 「次数」と「次元」が一致しない例も散見される.

(なお [K5] でもこのようなメカニズム・タイプ別に PWW 図式の一例を紹介しているので, 適宜参照されたい.)

3 具体的教材と実践例

この節では, 比較的手軽に実践できる手法である Web クイズ化教材の例として, 相加平均と相乗平均の関係, cos の加法定理, sin と cos の相互関係, の 3 例を, 実践結果と併せて具体的に紹介する.

なお, 以下で示す加法定理や相互関係の例は, 任意の範囲の角についての PWW 可視化ではなく, 最も典型的で分かりやすい場合についての可視化である. すなわち「完全な証明」とは言えないが, それでも, ある種の「核となるアイデア」を図示することで直観的な理解を促すことが可能であると考えられるため, その効果を検証し考察を行う.

3.1 相加平均と相乗平均の関係

$a > 0, b > 0$ に対し,

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

という不等式については, 教科書では通常, 左辺の相加平均と右辺の相乗平均の差を平方完成することで証明されることが多いが, この教材で用いる PWW 図式は図 3 である ([N3], p.93 の図を色付けなど微修正).

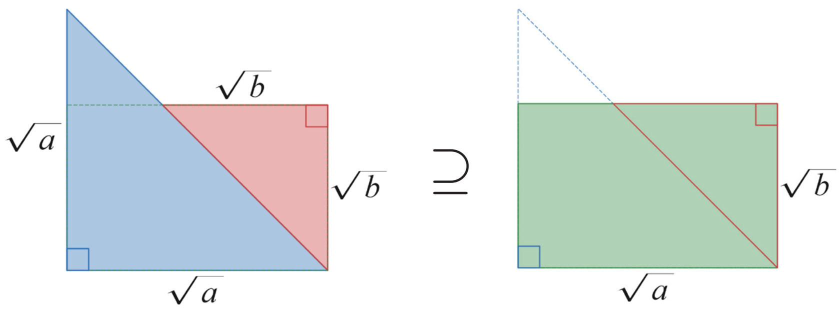


図 3: 相加平均と相乗平均の関係を表す PWW

すなわち, 平面図形の面積を用いた可視化である. 底辺=高さ=$\sqrt{a}$ の直角二等辺三角形と底辺=高さ=$\sqrt{b}$ の直角二等辺三角形によって相加平均を可視化し, 縦と横が $\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ の長方形を用いて相乗平均を可視化する. 2 つの図形を比較すれば, 相加平均の方が一般的に大きいことは明らかであり, 飛び出た「ツノ」の部分がない場合, つまり $a = b$ の場合のみ, 両者の図形が一致する (等号が成立する) ことも「見てわかる」わけである.

この PWW 図式を, Microsoft Forms を用いて, 5 問の 4 択クイズ化した (図 4). まず Step1〜2 で 2 つの直角二等辺三角形の面積と一辺の長さの関係を確認する. 次に Step3〜4 で相加平均と相乗平均のそれぞれの可視化を問う. 最後の Step5 でそれらを比較し不等式を導く.

このクイズの誘導に従えば, 教員による授業実施前でも, 自力で理解に到達できることが期待できる. フォームの 1 ページ目はこのクイズである. 2 ページ目は, クイズについて学習者が感じたことを 6 つの観点から 10 段階で評価してもらい, 自由記述コメント欄も付属させてある. 3 ページ目は, 学習者の属性のアンケートである.

筆者が当時所属していた, 富山高等専門学校 本郷キャンパスの第 1 学年 3 クラスを対象として, 2024 年 7 月 23 日の授業 (前期末試験前の補講日) 中に, この Web クイズを実施した. これは, 相加相乗などを学ぶ科目の前期末試験日程に合わせたものである.

全回答数は 119, クイズ部分 (1 問 1 点. 5 点満点) の平均点は 4.76 点 (正解率 95.2%) であった. アンケート結果は表 1 のとおりとなった. 分かりやすさ, 面白さ, 記憶に残りそうかどうか, の 3 項目が高い数字となっている.

図 4: 相加平均と相乗平均の関係を導く Web クイズ

表 1: 相加平均と相乗平均の関係 アンケート 2024 高専 1 年

評価軸	10 段階評価平均
分かりやすさ	8.20
面白さ	7.75
難しさ	5.35
記憶に残りそうかどうか	7.02
人にもうまく説明できそうかどうか	6.13
自分でも似たようなことを考えてみたいかどうか	5.96

また, コメント欄データから, テキストマイニングソフトウェア「KH Coder 3」で共起ネットワークを生成したものが図 5 である.

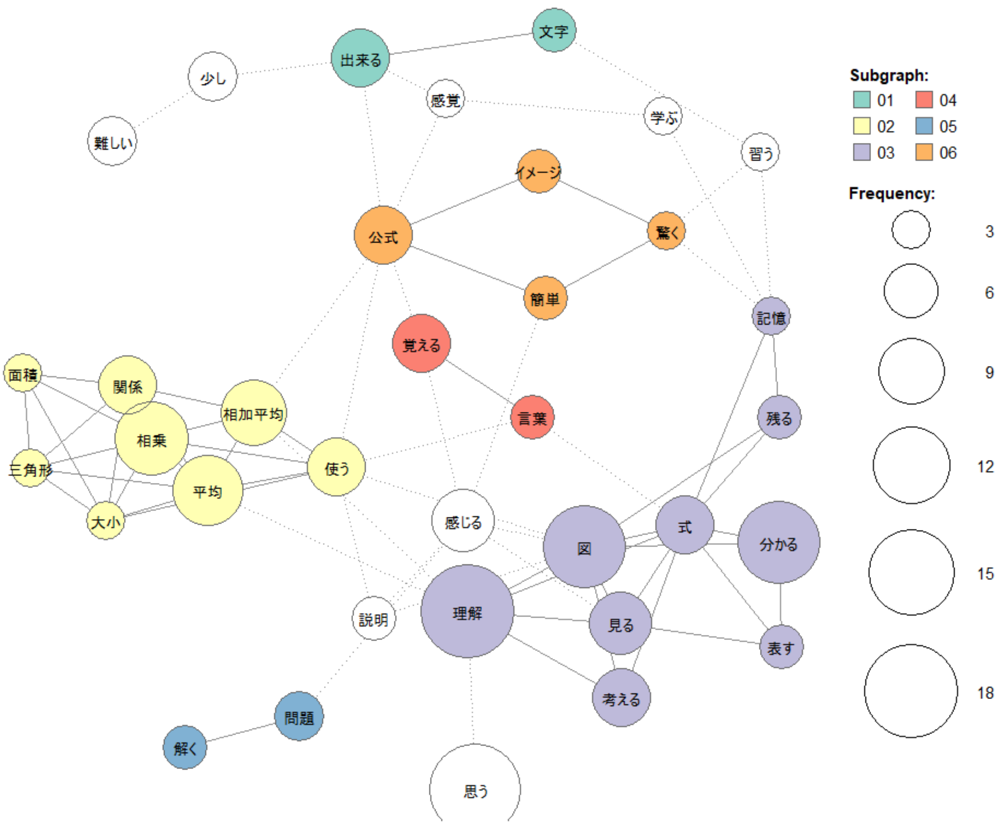


図 5: 相加平均と相乗平均の関係 共起ネットワーク 2024 高専 1 年

これは, 各コメントで出現頻度が高い単語ほど大きい丸で表示され, 同一コメント内に同時に存在する率が高い単語同士は線で結ばれるものである. 「理解」(理解できた), 「分かる」(分かった), などのコメントが多数あったため大きな丸となっている. また, 「公式, イメージ, 簡単, 驚く」の繋がりや, 「記憶, 残る」の繋がりも一定数見られた.

3.2　cos の加法定理

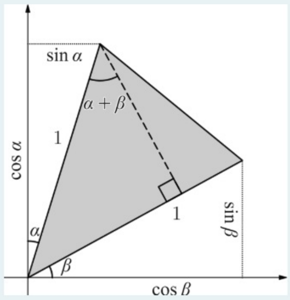
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

の PWW は既に複数のものが発表されている ([N2], pp.41-42 等) が, 最もシンプルなもののひとつは直角三角形の長さを用いたもの ([N2], p.46) と思われる.

本研究では, これら既存のものでなく, 筆者が新規開発した, 面積を用いた PWW[K12] を Web クイズに実装した. PWW 図式を 5 つのステップにし, 3 問の 4 択クイズによって学習者が自力で理解できるように工夫をした.

1

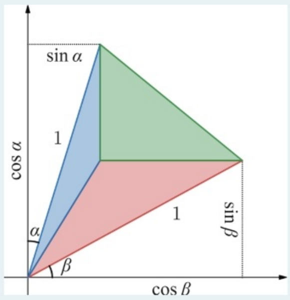
(Step1) この灰色の三角形の面積を、底辺×高さ÷2で求めるとき、正しいものはどれですか？
*



- 1×1sin(α+β)÷2
- 1×1cos(α+β)÷2
- 1×1sin(α-β)÷2
- 1×1cos(α-β)÷2

2

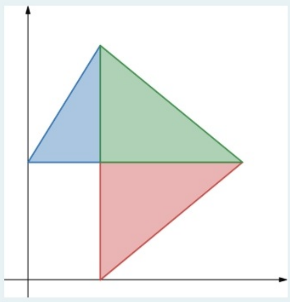
(Step2) 上記の三角形の面積を、もうひとつ別のやり方でも求めてみましょう。まず、赤・青・緑の3つに分割します。



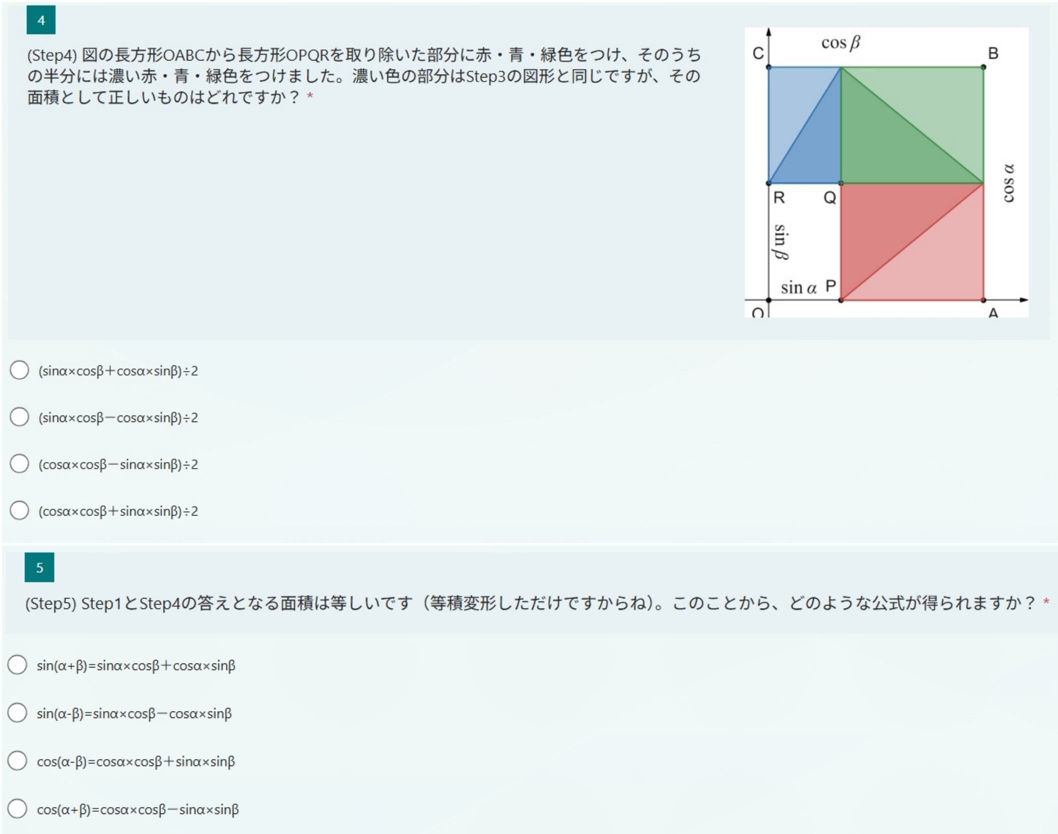
- OK

3

(Step3) 赤と青の三角形を、高さを保ったまま等積変形します。



- OK



フォームの 1 ページ目はクイズであり, 2〜3 ページ目は相加相乗と同じく, 学習者からの 6 観点評価と学習者属性についてのアンケートである.

3.2.1 高専 3 年生

筆者が当時所属していた富山高専 本郷キャンパスでは, 加法定理を第 1 学年の夏から秋にかけて学ぶ.

第 1 学年で実施する前の予備実験として, 2023 年 6 月下旬の授業内で, 第 3 学年 (つまり 2 年前に加法定理は学習済み) の 3 クラス対象に, クイズとアンケートを行った.

表 2: cos の加法定理 アンケート 2023 高専 3 年

評価軸	10 段階評価平均
分かりやすさ	7.92
面白さ	8.10
難しさ	6.81
記憶に残りそうかどうか	7.12
人にもうまく説明できそうかどうか	6.29
自分でも似たようなことを考えてみたいかどうか	5.64

全回答数は 121, クイズ部分 (1 問 1 点. 3 点満点) の平均点は 2.74 点 (正解率 91.3%) であった. アンケート結果は表 2 のとおりとなった. 面白さ, 分かりやすさ, の 2 項目が高く,

次いで, 記憶に残りそうかどうか, が 7.12 と比較的高い数字となっているが, 一方で, 難しさ, も 6.81 とかなり高い数字であった.

また, コメント欄データから KH Coder 3 で共起ネットワークを生成した (図 6).

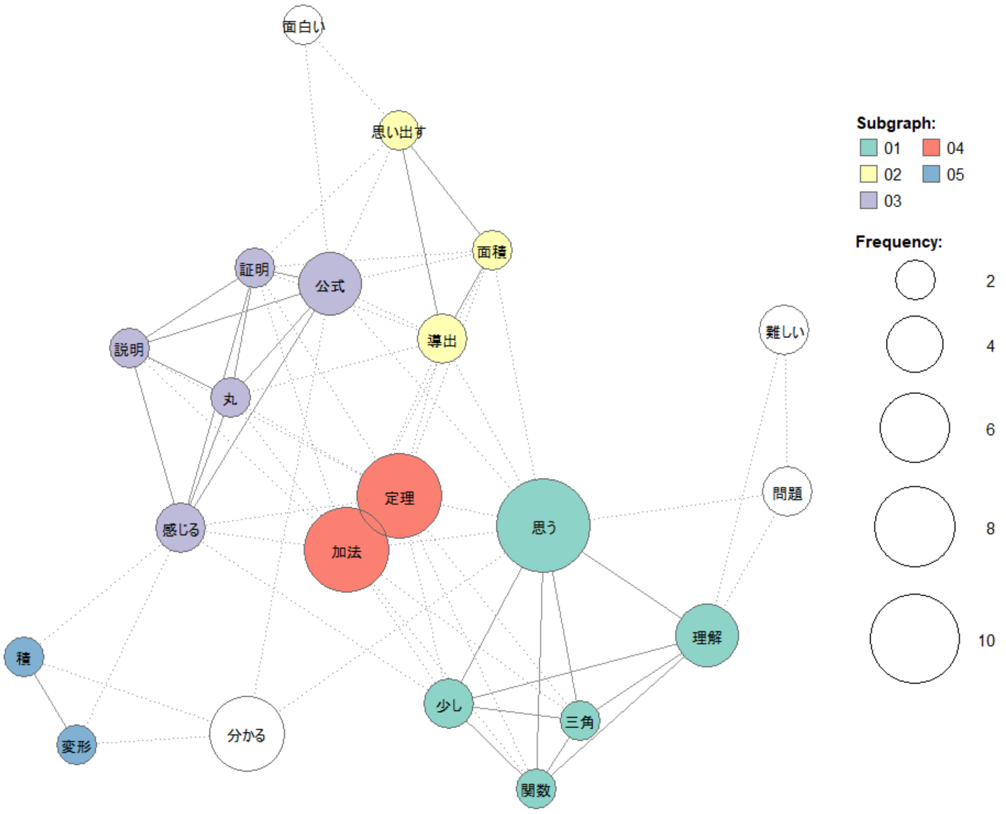


図 6: cos の加法定理 共起ネットワーク 2023 高専 3 年

「分かる」(分かった), 「理解」(できた), 「面白い」, 「思い出す」, などが頻出語であるが, 10 段階評価でも見られたとおり, 「難しい」も一定数見られている.

3.2.2 高専 1 年生

さらに, 第 1 学年 3 クラスも対象に実施した. 加法定理を学ぶ科目の夏休み課題の 1 つとして, 2023 年 8 月 1 日, Web クイズを Teams 上で学生に公開し, 8 月 31 日, 回答締切とした.

全回答数は, 107. クイズ部分 (1 問 1 点. 3 点満点) の平均点は 2.42 点 (正解率 80.7%) であった. 8 割は正解しているものの, 3 年生よりも低めとなっている. アンケート結果は表 3 のとおりとなった. 難しさ, 面白さ, の順で高い数字となった. 記憶に残りそうかどうか, 分かりやすさ, も高めである.

また, コメント欄データから KH Coder 3 で共起ネットワークを生成した (図 7). 10 段階評価の傾向が示す通り, 「難しい」が最頻出単語となっている. 一方で, 「理解」「分かる」「楽しい」などの単語もある程度出現していた.

表 3: cos の加法定理 アンケート 2023 高専 1 年

評価軸	10 段階評価平均
分かりやすさ	6.66
面白さ	7.27
難しさ	7.87
記憶に残りそうかどうか	6.70
人にもうまく説明できそうかどうか	5.34
自分でも似たようなことを考えてみたいかどうか	5.64

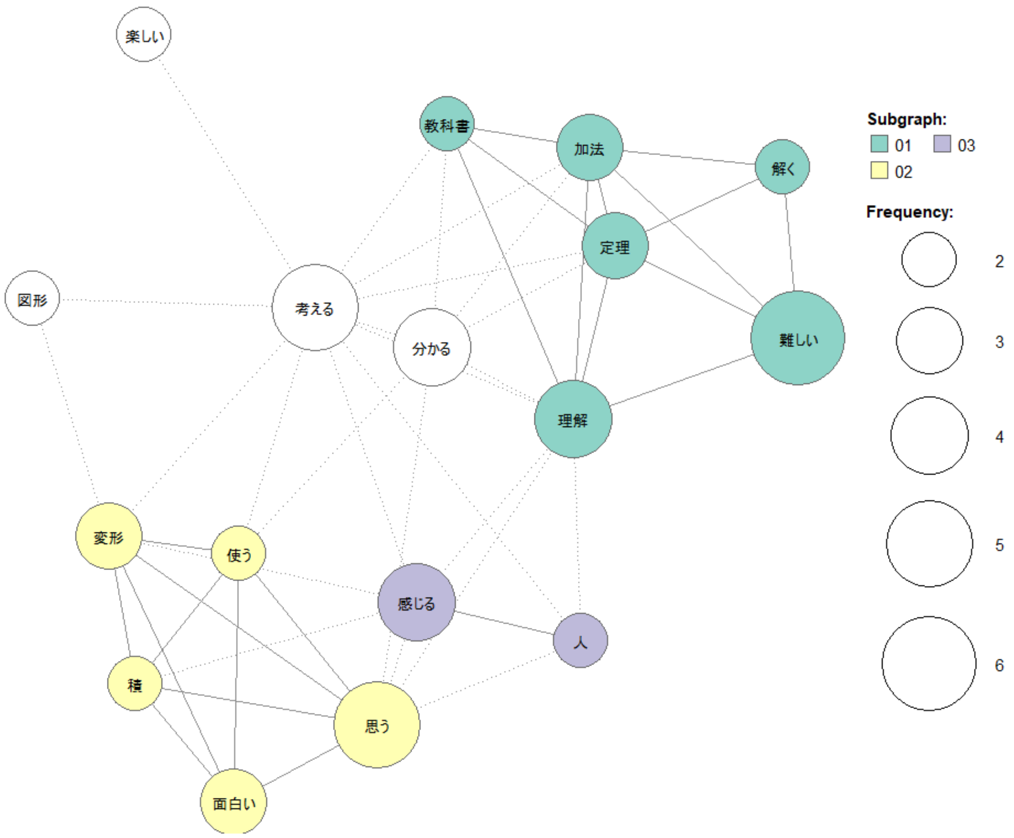


図 7: cos の加法定理 共起ネットワーク 2023 高専 1 年

3.2.3　考察

加法定理についての高専 3 年生と高専 1 年生の実践結果を比較すると, 全く同じ教材であっても, 1 年生は特に難しいと感じやすい結果となった.

差異要因の 1 つとして, 3 年生は授業中に実施 (教室の中で学生が一斉に体験) し, 1 年生は長期休み中に実施 (各学生がばらばらのタイミングで体験した) した, という違いが挙げられる.

また, 加法定理を習った直後の 1 年生には難しいと感じやすかった, というのも大きな 1 つの理由ではないかと考えている. 筆者のこれまでの教育経験では, sin や cos といった三角比・三角関数は, 高専 1 年生の夏の段階で自分の道具として使いこなせる学生は, 残念ながらあまり多いとは言えない. 平均点の (有意な) 違いから, 加法定理のクイズの難易度は相加相乗のクイズと比べると問題自体の難易度が高いと考えらえるため, 学生の習熟度の違いが特にアンケート結果にも難しさとして表出しやすかったのではないかと思われる.

学生が自力で理解に到達できるようになるという観点に立つならば, 習熟度の比較的低い学生にもより効果的な, さらに洗練された PWW 教材の開発が望まれる.

3.3 sin と cos の相互関係

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

の PWW として, 以下の図のような, 長さを用いた表現を用いる.

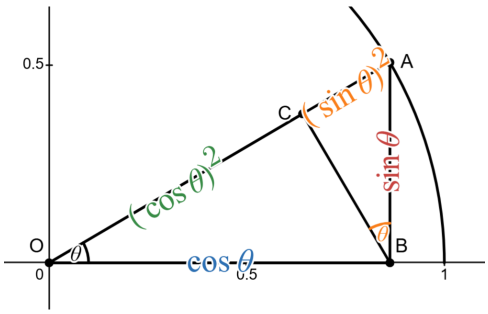


図 8: sin と cos の相互関係の PWW

学習者には, 上記の PWW 図式から情報をそぎ落とした以下の出題図をまず提示する.

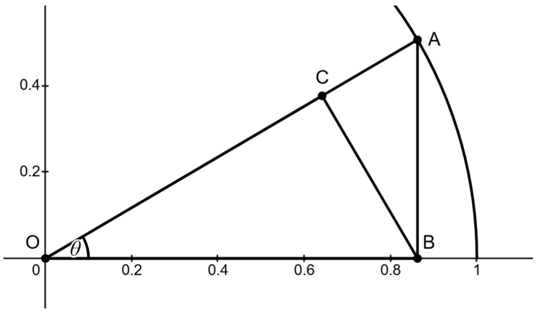
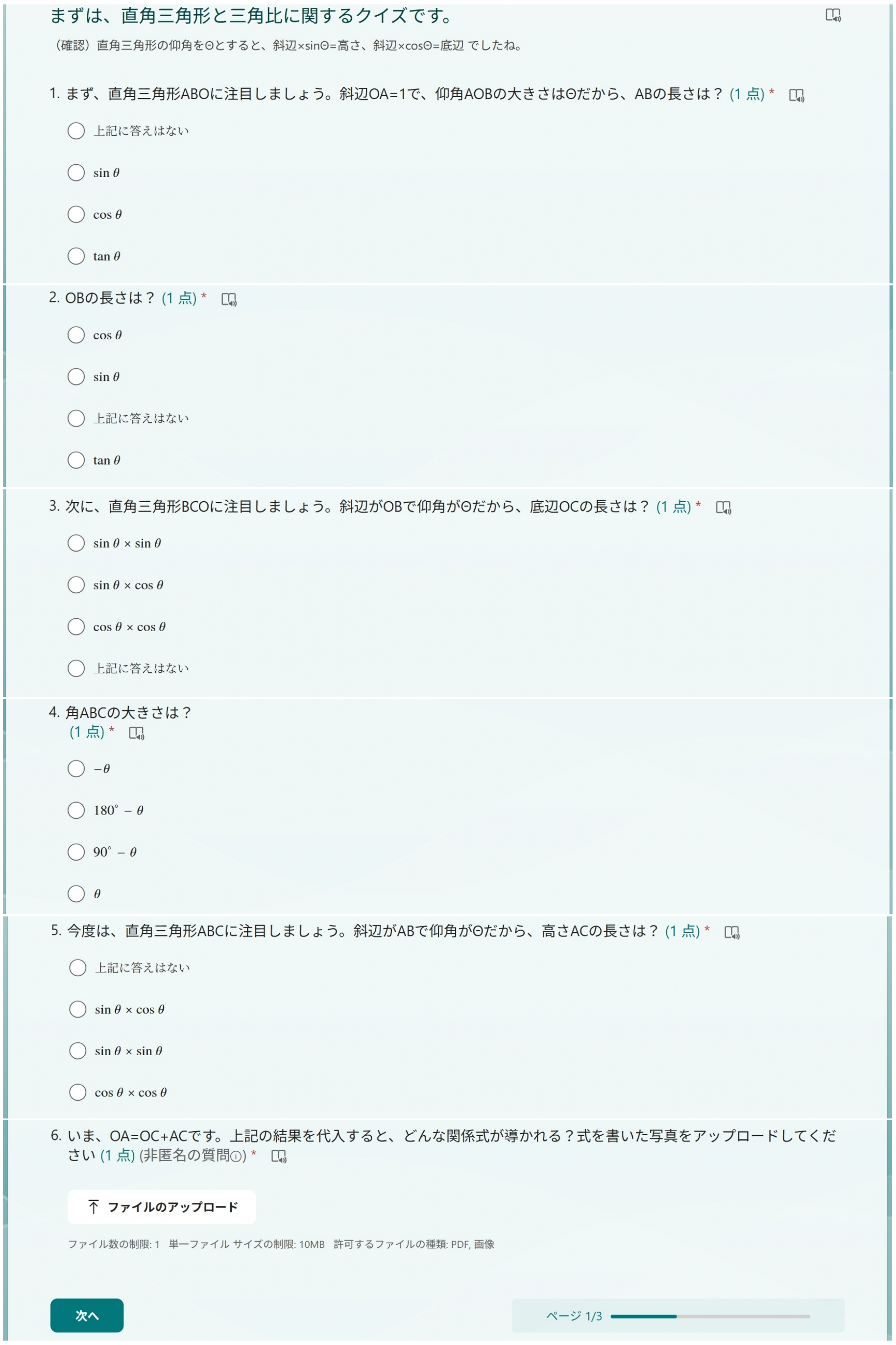


図 9: 出題図

この出題図を見せながら, 徐々に各部の長さや角度を明らかにしていく Web クイズを実施する. クイズは, 5 問の 4 択と, 1 問の記述回答の, 全 6 問からなる. 本教材の特徴として, 結論 (相互関係の式) を問う最後の設問のみ, 選択肢から答えるのではなく, 自由記述させる方法を試みている. 記述回答部分は, Forms の画像ファイルアップロード機能を利用して, 自分の回答となる式をスマホなどで撮った画像を提出させることとした.



まずは、直角三角形と三角比に関するクイズです。

（確認）直角三角形の仰角をΘとすると、斜辺×sinΘ=高さ、斜辺×cosΘ=底辺 でしたね。

1. まず、直角三角形ABOに注目しましょう。斜辺OA=1で、仰角AOBの大きさはΘだから、ABの長さは？ (1 点) *

- 上記に答えはない
- $\sin\theta$
- $\cos\theta$
- $\tan\theta$

2. OBの長さは？ (1 点) *

- $\cos\theta$
- $\sin\theta$
- 上記に答えはない
- $\tan\theta$

3. 次に、直角三角形BCOに注目しましょう。斜辺がOBで仰角がΘだから、底辺OCの長さは？ (1 点) *

- $\sin\theta \times \sin\theta$
- $\sin\theta \times \cos\theta$
- $\cos\theta \times \cos\theta$
- 上記に答えはない

4. 角ABCの大きさは？
(1 点) *

- $-\theta$
- $180^\circ - \theta$
- $90^\circ - \theta$
- θ

5. 今度は、直角三角形ABCに注目しましょう。斜辺がABで仰角がΘだから、高さACの長さは？ (1 点) *

- 上記に答えはない
- $\sin\theta \times \cos\theta$
- $\sin\theta \times \sin\theta$
- $\cos\theta \times \cos\theta$

6. いま、OA=OC+ACです。上記の結果を代入すると、どんな関係式が導かれる？式を書いた写真をアップロードしてください (1 点) (非匿名の質問ⓘ) *

ファイルのアップロード

ファイル数の制限: 1　単一ファイル サイズの制限: 10MB　許可するファイルの種類: PDF, 画像

次へ　　ページ 1/3

フォームの 1 ページ目はクイズで, 2〜3 ページ目は同様のアンケートである.

筆者が当時所属していた富山高専 本郷キャンパスの第 1 学年 3 クラスを対象に, 2024 年 8 月 7 日〜8 日 (夏休み前, 前期最終授業日) の授業中に実施した.

全回答数は, 124. 4 択クイズ部分 (1 問 1 点. 5 点満点) の平均点は, 4.55 点 (正解率 91.0%) であった. また記述回答部分 (1 問) は, 正解数 106, 正解率 85.5%であった. 記述回答のため, 偶然や「あてずっぽう」では正解できないが, 85%以上が正解していた.

アンケート結果は表 4 の通りとなった. 面白さ, 分かりやすさ, 記憶に残りそうかどうか, の 3 項目が高くなっている.

表 4: sin と cos の相互関係 アンケート 2024 高専 1 年

評価軸	10 段階評価平均
分かりやすさ	7.93
面白さ	8.14
難しさ	6.48
記憶に残りそうかどうか	7.43
人にもうまく説明できそうかどうか	6.75
自分でも似たようなことを考えてみたいかどうか	6.46

また, コメント欄データから, KH Coder 3 で共起ネットワークを生成した (図 10).

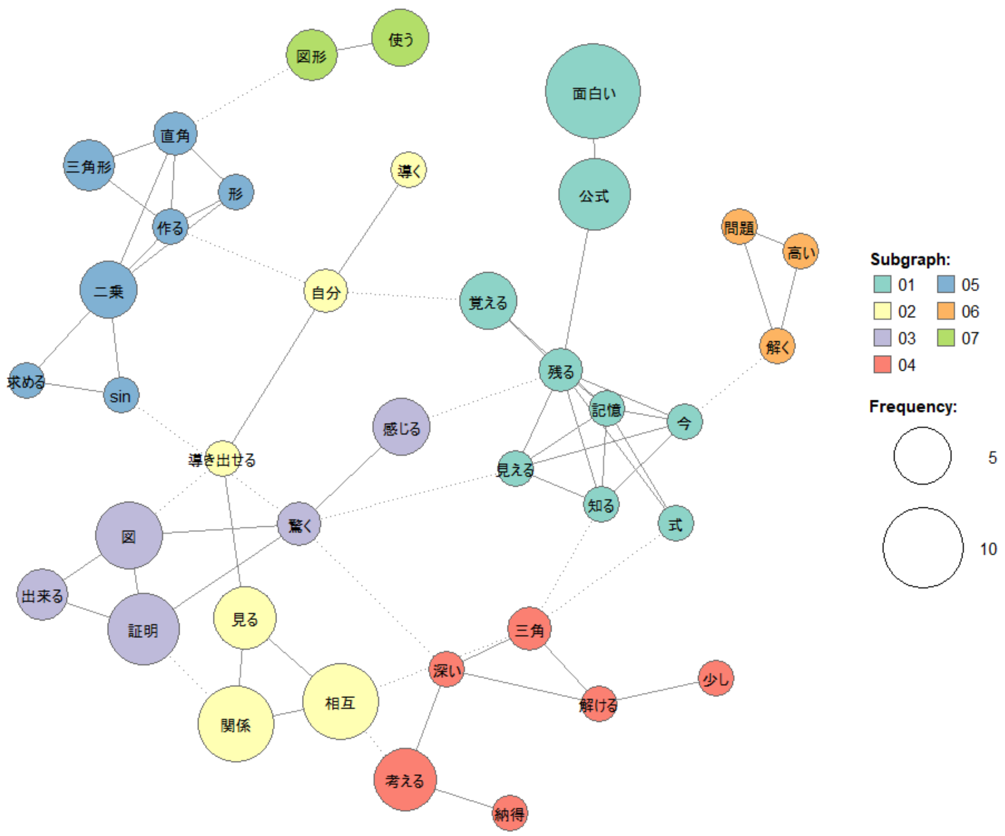


図 10: sin と cos の相互関係 共起ネットワーク 2024 高専 1 年

「面白い」が最頻出単語となり, 他にも肯定的な単語が多く見られた.

4　まとめと今後の課題

本稿では, proof without words (PWW) の教材開発とその実践について, 筆者の近年の取り組みを複数の視点から概観した.

PWW を教材として実践する手法には, 少人数授業, 動画教材, Web クイズ, グループワーク探究, など様々な手法がある.

Web クイズ化という手法は, 教材作成や実施が比較的手軽であり, 学生らが自力で PWW 図式による数学的命題の理解に到達できることが期待できるものである. 具体的な教材 3 例 (相加相乗, 加法定理, 相互関係) の中身を紹介し, 実践結果を報告した. クイズ成績の高さから, 多くの学生は理解に到達していた. また, アンケート結果や学生の反応を見ても, 分かりやすさ, 面白さ, などが概ね高くなっていた.

今後の課題として, 更なる新しい PWW 教材の開発, これまで開発した PWW 教材や授業実践計画の洗練化, アンケート結果などの詳細な分析, 高専の数学教育において PWW 教材の体系的な活用を検討, などが挙げられる.

なお, 最近の教育においては「個別最適な学び」の充実が求められているが, Web クイズ教材は, その目的に適うものの 1 つではないかと考えられる. この観点からも, 教材の開発・活用・普及が望まれる.

PWW 教材に興味を持たれた先生や, PWW 教材を利用されたいという先生がいらっしゃいましたら, ぜひ筆者までご連絡をいただけると幸いです.

5　謝辞

本研究において様々な教材の実践に協力していただいた学生の皆様に感謝いたします.

本研究の Web クイズ実施については, 富山高等専門学校 (本郷キャンパス) 一般教養科 (数学科目) 河原治先生, 非常勤講師 長田治先生にもご協力を頂きました. 感謝いたします.

アンケートコメント欄の分析において, 樋口耕一先生によるテキストマイニングソフトウェア KH Coder Version 3.Beta.04c を利用させていただいたことに感謝を申し上げます.

本稿の掲載にあたって, 様々な有益なコメントを頂いた匿名の先生, ならびに編集に携わる先生方に感謝申し上げます.

本研究は JSPS 科研費 JP19K03158, JP22K03013, JP23K02818 の助成を受けたものである.

参考文献・発表

[N1] Roger B. Nelsen, “Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking”, The Mathematical Association of America (1993).

[N2] Roger B. Nelsen, “Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking”, The Mathematical Association of America (2000).

[N3] Roger B. Nelsen, “Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking”, The Mathematical Association of America (2015).

[ANS1] Roger B. Nelsen 著, 秋山仁, 奈良知恵, 酒井利訓 訳, 『証明の展覧会 I : 眺めて愉しむ数学』, 東海大学出版会 (2002).

[ANS2] Roger B. Nelsen 著, 秋山仁, 奈良知惠, 酒井利訓 訳, 『証明の展覧会 II : 眺めて愉しむ数学』, 東海大学出版会 (2003).

[T] 高遠節夫 ほか, 『新基礎数学 改訂版』, 大日本図書 (2020).

[K1] Masahiro Kasatani, “Proofs without Words — a D.I.Y. approach to power sums”, Meeting of number theory, ring theory, Hopf algebra theory and related topics, 2019 年 2 月 23 日発表.

[K2] 笠谷 昌弘, 『自然数のべき乗和公式の図形的な「証明」—教具の開発と実践—』, 第 68 回北陸四県数学教育研究 (長岡) 大会予稿集 (2019), 52.

[K3] 笠谷 昌弘, Mits Kobayashi, 『平方三角数の図形的導出について』, 数学教育学会 2022 年度秋季例会予稿集 (2022), 72–74.

[K4] 笠谷 昌弘, 『自然数の累乗和公式の図形的証明とその課外授業実践』, 数学教育学会 2023 年度春季年会予稿集 (2023), 28–30.

[K5] 笠谷 昌弘, 『Proof without words（証明の可視化, 見てわかる証明）』, 大日本図書 高専教育フォーラム **5** (2023), 2–3.

[K6] 笠谷 昌弘, 『Proof without words の web クイズ化教材と学習者評価』, 数学教育学会 2023 年度秋季例会予稿集 (2023), 67–69.

[K7] 笠谷 昌弘, 『三角錐を用いたベータ関数の可視化 (PWW) を web クイズ教材化してみた』, 数学教育学会 2024 年度春季年会予稿集 (2024), 150–152.

[K8] 笠谷 昌弘, 『Proof Without Words 教材を理数探究活動に繋げる試み』, 数学教育学会 2024 年度秋季例会予稿集 (2024), 22–24.

[K9] Masahiro Kasatani, Mits Kobayashi, “A geometric approach to triangular-square numbers”, Mathematics Magazine **97**(5) (2024), 495–502.

[K10] 笠谷 昌弘, 『Proof Without Words（見てわかる証明）の Web クイズ教材と実践 〜相加相乗、加法定理、相互関係〜』, 第 71 回北陸四県数学教育研究 (新潟) 大会予稿集 (2024), 59.

[K11] 笠谷 昌弘, 『Proof without words（見てわかる証明）の数学教材開発と実践』, 第 7 回数学教育セミナー「多様化する教育環境における数学教育の実践」, 2025 年 3 月 1 日発表.

[K12] Masahiro Kasatani, “Visual Proofs for the Cosine of a Sum and the Sine of a Difference”, Mathematics Magazine **98**(2) (2025), 139–142.